ИНФОРМАЦИЈА ПЕРЦЕПЦИЈЕ

слобода, демократија и физика

Растко Вуковић

Растко Вуковић:
ИНФОРМАЦИЈА ПЕРЦЕПЦИЈЕ - слобода, демократија и физика

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна и универзитетска библиотека
Републике Српске, Бања Лука

316.647
159.937.24

ВУКОВИЋ, Растко

Информација перцепције : слобода, демократија и физика / Растко Вуковић. - Бања Лука : Економски институт, 2016 ([б. м. : б. и.]). - 88 стр. : граф. прикази ; 25 cm

Библиографија: стр. 85. - Регистар.

ISBN 978-99938-854-3-6

COBISS.RS-ID 5977880

Лектор: Горан Дакић
Рецензије:
др Момир Ћелић, Електротехнички факултет, Бања Лука
др Александар Савановић, Факултет политичких наука, Бања Лука

Предговор

Ова књига је ретроспектива мојих анализа савремених социолошких проблема објављиваних последњих пар година. То су расправе понекад потакнуте кафанским питањем или дописивањем путем друштвених мрежа, али које су ипак завршаване у осами тражењем бољих дефиниција и математичких форми. Зато ће идеје овде изложене понеком академику деловати уврнуто или бар претерано оригинално.

Међутим, у време писања првих брошура (до 2014. године), сада резимираних у овој књижици, те за мене занимљиве приче биле су толико необичне да бих тешко могао пронаћи колегу из струке који ме је могао схватати озбиљно. Заправо, сваки образованији саговорник који би помислио да причам озбиљно да „једнакост води у сукобе“ био је „веома разочаран“ мојим непознавањем суштине демократије и неразумевањем чињенице да „управо равноправност“ гарантује мир, просперитет и слободу. Да - када бих наставио - за конкуренцију је управо потребна равноправност зато да би могао настати „здрави сукоб“ - тада би и престао даљи разговор. Немаш ти појма - био би искрен одговор. Ви сте медиокритети - узвраћао сам - и трошење државе због ваших диплома је пропала инвестиција, јер никада нећете научити да размишљате својом главом!

Наравно, овакви „забавни тренуци“ били су ретки, за разлику од оних пријатних. Правих расправа мало има без различитих саговорника.

Све су то разлози да текст пишем од лакшег ка тежем, од општег ка појединачном, односно од мање ка више стручном. Желео сам да садржај допре до што ширег круга читалаца, јер су и делови настајали потакнути од таквих. Што се тиче квалитета идеја, оне су биле прво слободне асоцијације, понекад само кафански излети или напади оригиналности, да би тек понека сазревала. Оно што би остајало су ретке тезе којима нисам успевао пронаћи контрадикцију и њихове разраде, а мноштво другога је најбоље заборавити.

Растко Вуковић, јуни 2016.

Sadržaj

Увод

У време тражења принципа које овде излажем односом социологије и математике доминирала су два филозофска правца. Теоретичари друштва су се делили према питању егзактности друштвених појава. Ако уопште постоје снажне законитости релација међу људима, да ли се до њих може досегнути математиком? Професору математике у кафанским и фејсбук расправама то је „набачено“ као изазов, који је временом постајао интересантнији.

Да ли верујем да постоје „математички принципи“ понашања друштва?

Да, верујем да они постоје, али су нам још увек непознати! Ако постоје и могу се открити, онда неко мора бити први, зар не? Управо зато би „прави“ принципи требали бити привлачни (будућим) „правим“ математичарима. Тако су и текли први разговори.

Писао сам у једној полемици. Када је Блез Паскал у 17. веку у својих четири - пет писама Ферми поставио темеље „теорије вероватноће“, до 20. века су филозофи и математичари вртили главом пуни сумњи. Није могуће да се нешто што је последица случајности, нереда и хаоса дефинише и истражује егзактно. Такве небулозе поготово никада неће постати математиком, јер знамо да су математика и сви њени делови саздани од самих чистих апсолутних истина, које су сасвим имуне на историјски период настанка, време свог трајања, развој других наука или друштвених односа - говорили су скептици.

Међутим, почетком 20. века се десило чудо. Није математика одустала од својих апсолутних истина, већ је бриљантни руски математичар Колмогоров открио аксиоме теорије вероватноће. Знамо да су то само три аксиоме из којих је могла почети дедукција, апсолутна дедукција, која је довела до теорема које су се углавном поклопиле са интуицијом (данас кажемо генијалног) Паскала.

У тим новим математичким областима још је једна ствар чудна. Помоћу принципа теорије вероватноће доказујемо теореме геометрије, алгебре, анализе, а наравно и обрнуто. Заправо, такав би морао бити и нови циљ, у тражењу апсолутних истина унутар друштвених небулоза.

Није било лако убедити саговорнике у оно што овде излажем. Неки критичари су ми били веома поучни, а неки баш и нису.

„Да ниси математичар можда би и могао схватити да слобода није и никада неће бити број“, говорили су су ми добронамерно. Или: „Само некоме коме је глава пуна вектора може пасти на памет да тако говори о интелигенцији и хијерархији“. „Не знам како не можеш да разумеш да ‚слобода‘ и ‚ограничавање‘ имају супротна значења“, убеђивао ме је један колега, желећи рећи да су то реципрочне величине, а не пропорционалне како их ја третирам.

Ове сада забавне критике наводим да подсетим будућег читаоца на тежину наредних тема у време када су отваране.

Glava 1

Перцепција

Реч *перцепција* (лат. *perceptio*, *percipio*) значи опажање, опажај, али и сва она душевна стања и збивања која су непосредно изазвана чулним надражајима. То је реч која се у психологији користи само за жива бића, што и овде подразумевамо. *Живим* бићем сматраћемо оно које може да доноси *одлуке*. Одлука је резултат *одлучивања*, а одлучивање је процес препознавања и бирања *опција* заснован на вредностима и опредељењима онога који одлучује.

1.1 Слобода

Слобода јединке је пре свега ограничена могућностима њене укупне перцепције, а затим и могућностима кориштења тих перцепција. Перцепције можемо делити у односу на тело јединке на унутрашње и вањске, према значају или учесталости. У сваком случају можемо говорити и о количини перцепција на начин како математика дефинише информацију.

У теорији вероватноће *информација* је „количина неодређености“, односно оно што добијамо „реализацијом случајности“. За сада само приметимо да бацање коцке има више неизвесности од бацања новчића, те да је информација „пао је број 3“ при бацању коцке већа од „пало је писмо“ у бацању новчића. Већа је вест „човек је ујео пса“ од вести „пас је ујео човека“, јер је прва мање очекивана. Сходно томе, већа неизвесност генерише већу „количину могућности“, коју ћемо овде означавати са ℓ и називати *слободом*.

Слобода ℓ је број, мера свих опција коју би јединка могла бирати с обзиром на своја чула, односно сопствене моћи опажања, а у односу на своју околину. Дакле, у овом тексту је (тотална) *слобода* она величина коју у алгебри вектора називамо *скалар*. Кратко речено, скалар ℓ је количина могућности. Она је такође (укупна, свесна или несвесна) информација добијена путем перцепција коју јединка може имати како о себи тако и о вањском свету.

Перцепција је углавном несвестан процес којим се подаци доспели из разних чула интерпретирају правећи неку целину. Зато што је тај процес несвестан он се лако поопштава на све шире облике живота, па и даље. Отуда потреба дефинисања,

односно разликовања живог од неживог бића.

Већ је речено да је „живо“ оно што може да „одлучује“, али нећемо прецизирати шта је то „одлука“. У математици није необично постављати „лабаве“ аксиоме, формалне и универзалне, који се лако интерпретирају на различите начине и лако поопштавају. Отуда и долази лакоћа примене математике у различитим областима.

На крају 19. века немачки математичар Хилберт[1] је објавио аксиоме геометрије подељене у пет група. У првој групи су аксиоме везе или „инциденције“ којих има осам, али наводим само прве две:

I-1: За две тачке A, B постоји увек права a која припада свакој од ових двеју тачака A, B.

I-2: За две тачке A, B не постоји више од једне праве која би припадала свакој од двеју тачака A, B.

Генијална идеја Хилберта била је да прекине расправе о „дебљини“ или „дужини“ тачке и парадоксе о потребном броју тачака за једну дуж на начин да Еуклидове аксиоме формализује и дозволи поопштавање објеката геометрије. Тако да речи „права“ и „тачка“ у његовој геометрији можемо слободно заменити речима „кућа“ и „прозор“, а да добијена „геометрија“ буде опет тачна.

Слично овде третирамо значење појма „одлука“. Остављено је читаоцу на вољу да зависно од начина како разуме „способност одлучивања“, да тако постави летвицу, свој ниво дефиниције живота. Ако су само људи способни да одлучују у реду, наставак ове теорије мора да буде тачан „само за људе“. Ако се сматра да и остали примати имају способност одлучивања и то је у реду, остатак теорије биће тачан и за примате. Слично и даље, ако и бактерије имају способност одлучивања, онда ће теорија важити и за њих.

Рецимо, бактерије могу одлучивати, јер се не могу програмирати. Направи ли неко бактерије (мале роботе) којима ћемо моћи у потпуности управљати онда то неће бити ове данашње, које ћемо и даље сматрати живим бићима. Шаховски програм (*Deep blue*) који је 1997. године у мечу против Каспарова победио још увек није живо биће, јер је слепо следио програмеров код. Међутим, можемо сматрати живим бићем „машину“ која би нам рекла: овај део твог кода хоћу, а овај нећу да урадим. Исти критеријум важиће за било који данас непознати облик живота, како на Земљи, тако и изван.

Не улазећи у разлоге одлучивања приметимо да је оно последица постојања опција, потреба и могућности избора. У основи доношења одлука је недетерминизам физичког света и способност живог бића да користи неизвесности. Сваки облик живота има неку слободу бирања својих могућности, према личној способности и вањским околностима. Отуда су избори датих могућности оно што у теорији вероватноће називамо исходима случајних догађаја. Слободе постоје јер постоје случајни догађаји и њихове реализације, а затим зато што их можемо опажати и користити.

Други феномен перцепције је њена различитост за различите врсте живота. Перцепције траве нису исто што и перцепције мрава, макар они били на истом тлу.

[1] David Hilbert (1862-1943), Grundlagen der Geometrie, 1899

Перцепција биљке је њена способност да осети и реагује на окружење подешавајући своју морфологију, физиологију и фенотип. Биљка реагује на хемикалије, на светло, влажност, температуру, гравитацију, инфекције, али и на неке звуке и додир.

Мала цветајућа биљка *arabidopsis thaliana* помоћу криптокрома[2] опажа и магнетно поље. Топола може препознати промену оријентације и нагиб. Познато је да повређени парадајз производи испарљиве мирисе метил-јасмоната као алармни сигнал који сличне биљке у окружењу препознају и покрећу производњу хемикалија за одбрану од инсеката и других грабежљиваца.

Дакле, различити облици живота имаће различите укупне количине могућности, овде слободе ℓ, које ће се веома полако мењати еволуцијом. Толико полако да у распону до пар десетина генерација овај број можемо сматрати константним[3]. Са друге стране, исти број слобода се брже мења променом средине. Појавом видеоигрица, мобилних телефона, аутомобила, данас имамо неке могућности које нису имали пећински људи, али смо и изгубили неке због изласка из дивље природе.

Ограничења перцепција се формално могу добити сужењем скупа свих слобода, избацивањем „могућности“ које никада не бирамо. Можемо их добијати и дајући им мањи значај (мањи интензитет). Неке изборе не правимо зато што их не желимо, неке зато што нисмо довољно паметни, а неке зато што су нам забрањени. Ми заправо веома велики број могућности никад или веома ретко бирамо, а одлучујемо се на само релативно мали број њих.

Сада погледајмо да значење речи „слобода“ овде дефинисано није једнако нити једном претходном у филозофији. Са друге стране, надам се да ће ово ℓ бити широко применљиво и у филозофији, на начин како се математика иначе примењује у другим дисциплинама.

Реч слобода (*kata physin*) код Хераклита из Ефеса (око 500. г.п.н.е.) представља норму: мора се деловати „према нарави“ и морално. Сократ се такође заузимао за безусловну вредност моралнога, дакле ограничавао је слободу. Грчка реч за слободу (*eleutheria*) изворно значи само правно-политичку слободу. Слободан град-држава (*polis*) је онај који није под влашћу странаца. Касније, код Платона и Аристотела, јавља се појам личне слободе и етичке одговорности, када морална слобода постаје нешто сасвим друго од социјално-политичке.

Хегел је разликовао објективне и субјективне слободе, држећи да су унутрашње, субјективне слободе битан услов моралног деловања. Слобода није дозвољавање било какве својевољности, већ је она ограничена моралним, одговорним и људски исправним деловањем. Затим се појам слободе ширио до индивидуално-етичких и социјално-етичких норми, али је она у свим историјским периодима увек остајала само ограничена слобода.

Субјективна слобода је нарочито вишеструко негирана у раном новом веку. У строгој слици света тадашњег механицизма, према којој је све нужно, једнозначно одређено, није било места нити за слободно деловање. У том духу је и Спинозин метафизички детерминизам у делу *Ethica*, са којим се Лајбниц и Кант обрачунавају

[2] грч. $\kappa\rho\nu\pi\tau o\zeta$ $\chi\rho\omega\mu\alpha$ - скривена боја

[3] то пишемо ℓ = const.

сваки на свој начин.

Тек од 1700. године, од времена енглеских слободних мислилаца и француске револуције (када постаје борбеном лозинком: *liberte*), под слободом се разуме нешто што је Хегел називао „апстрактном слободом", оном која је ослобођена конкретне везаности и која се подиже у неограничене просторе слободе. Апстрактна слобода достиже ширину чисте самовоље.

Данашња *филозофија* познаје слободу као право избора и способност човека да бира и да доноси одлуке. Слободу као аутономију деловања која значи могућност делања по сопственој вољи које претпоставља одсутност сваке принуде споља. Затим као слободу воље која подразумева све оно што не шкоди другоме. У онтолошком смислу слобода чини бит човека, његову човечност која га разликује од осталих бића детерминисаних нужношћу. Ову последњу називају и личном слободом.

Дакле, дефинисали смо слободу ℓ пре као „простор случајних догађаја" теорије информације[4] него као познату филозофску одредницу. Па ипак сам убеђен да ће овај приступ показати своју велику ефикасност у темама социологије, психологије и друштва уопште.

1.2 Интелигенција

Способност јединке да дође до избора које јој омогућавају њене перцепције (до слобода ℓ) називаћемо *интелигенција* и означавати са $\mathbf{i}$. Кратко, интелигенција је способност коришћења могућности.

Јасно је да су могућности које користи интелигенција $\mathbf{i}$ на неки начин ограничене количином свих могућности, тј. слободом ℓ. Са друге стране, олако би било претпоставити да је $\mathbf{i}$ број, као што је то ℓ. У најбољем случају, ако интелигенција није број, онда је она векторска величина (која има правац, смер и интензитет) попут брзине, силе или у геометрији „оријентисане дужи". У тежим случајевим, интелигенција би могла бити матрица, тензор или нека још сложенија математичка структура, али би било оптимално одредити је као најједноставнију од понуђених форми, а опет најближу интуитивном појму „интелигенција". То ће заправо бити нови смисао старог појма.

Већа интелигенција значиће и већу количину могућности, односно захватаће већи део броја ℓ или ће тражити већи ℓ. Према томе, интелигенција о којој говоримо је на неки начин директно пропорционална слободи. Дакле, ако икада конструишемо интелигентну машину прво што би таква могла тражити је више слободе. То је нама прихватљив, али је изненађујући закључак, с обзиром на савремено схватање робота, њихове улоге међу људима и њихове послушности.

Друго, јасно је да учењем и увежбавањем можемо стећи или повећати неке своје способности. То значи да интелигенција како је дефинишемо није само она коју мери IQ, већ укључује и сва знања и умећа која имамо. Узимам конкретне примере али подсећам да тражимо одреднице интелигенције за сва жива бића уопште, односно за

[4] в. у библиографији [4].

она бића која могу да доносе одлуке. У том смислу, интелигенције једноћелијских организама су својеврсни атоми овог новог појма.

Затим, ми не користимо све опажаје једнако, не увек исто, нити је исти предмет опажања једнак за све појединце. То, са једне стране, значи да интелигенција није тотална перцепција, у смислу апсолутне употребе свих опажаја, а са друге стране да се она може „прерасподредити“, односно да се иста количина интелигенције може употребљавати за различите сврхе.

Животињске врсте се боре да би опстале у дивљини са великом снагом, брзином, са способношћу прикривања, затим са добрим инстинктом пре него са значајном интелигенцијом. Са становишта еволуције која иде малим корацима - екстремни развој мозга који је велики потрошач енергије (као код човека) можда је био веома ризичан експеримент? Штавише, савршена интелигенција за еволуцију као да је била претежак задатак. Спорим биљкама, а и многим другим врстама, била је довољна мала памет.

То би били емпиријски докази да интелигенција није (увек) једнака укупној перцепцији. Они немају много везе са егзактним, али могу да потврде да је хипотеза о невеликом интензитету $\mathbf{i}$ у односу на слободе ℓ на добром путу.

Када видимо мрље боје наш мозак их тумачи као одређени предмет, али је број варијација који видимо ограничен нашим искуством и памећу. Неко ће на цртежу Витрувијевог човека[5] видети само мушкарца у два положаја који се преклапају, други ће видети и златне пресеке, а трећи ће се сетити Ђузепе Босија који је овај цртеж убацио у своју монографију о Леонардовој Тајној вечери.

Мноштво звукова и речи, које чујемо као говор, имаће за нас више значења ако разумемо језик на којем се прича. Комбинацију укуса препознајемо као јело, а наша претходна искуства дегустирања повећавају број мишљења, реакција и одлука у вези са истим јелом. Према томе, за разлику од количине могућности интелигенција повезује знања и хтења, односно прошлост и будућност. Она је вектор!

Подсетимо се да перцепција укључује организацију, идентификацију и интерпретацију информација које се могу опажати са циљем прилагођавања и интеракција са окружењем. Она настаје када физичке или хемијске стимулације чула постају сигнали који путем нервног система стижу до мозга или до неког другог органа јединке. Перцепција није пасивни пријем тих сигнала, већ и оно што њима настаје, попут пажње, очекивања, меморије, учења. Перцепција је више од просте количине могућности (више од информације), а интелигенција поред тог нумеричког дела „филтрира“ и нека њена векторска својства.

Дакле, перцепција већ садржи векторска својства (као и својства информације). Последња група аргумената говори о начину формирања интелигентних представа, из прошлих искустава за будућу акцију. Када се сусретнемо са опасношћу (бомба, отров, измицање тла), а што би нам могло изгледати безазлено осим ако имамо урођени или стечени страх са појавом, наше генетско или лично искуство определиће нашу представу о доживљају. Тако долазимо до закључка да је интелигенција искуство-информација-акција. Наше искуство обликује наше перцепције, па ће

[5]Леонардо да Винчи, око 1487. године.

две интелигентне особе исто затечено стање различито разумевати. Интелигенција подразумева меморију, њен смисао и примену у евентуалној будућој акцији.

Приметимо да и речи „меморија“ и „примена“ можемо формализовати, рецимо стављајући их у контекст Њутнових закона инерције. Наравно да не морамо ићи тако далеко, већ само до траве или неког још једноставнијег облика живота, па рећи да дата јединка филтрира опажања из свог окружења према свом генетском наслеђу или личним искуствима, а зарад своје будуће користи. Свеједно, значај прошлости и будућности за тумачење опажаја указује на векторски смисао интелигенције. То није исти аргуменат као претходно поменуто „прераспоређивање“, али води до истог закључка, до векторске природе интелигенције.

Интелигенција **i** има правац, смер и интензитет, попут брзине, импулса или силе у физици. Уопште, интензитет вектора **v**, који ћемо писати масним (*bold*) словом, такође се назива *модуо* или норма, што се означава косим (*italic*) истим словом:

$$v = |\mathbf{v}| \quad \text{или} \quad v = ||\mathbf{v}||. \tag{1.1}$$

Када кажемо „овај ауто је бржи од оног“, уобичајено не постављамо питање „на ком правцу и у ком смеру“. Када кажемо „ова сила је већа од оне“ не питамо „у ком смеру“. Тако ћемо и овде рећи „овај вектор је већи од оног“ подразумевајући „у односу на неки други вектор истог правца и смера“, осим ако је наглашено другачије.

Дакле, интелигенција **i** је способност коришћења опција, а опет она није исто што и слобода ℓ. На питање по чему се разликује интелигенција од слободе, ако изузмемо већ наведено (прва је вектор, друга скалар), одговор је: према способности и количини неизвесности. Најмања таква разлика је низ нултих неизвесности. Ако би могло постојати живо биће са свим нултим разликама, имало би таман толико смањену перцепцију или повећану интелигенцију да може примати, разумети и користити потпуну, тоталну слободу! Али, зашто нема таквих?

Следећа група аргумената долази из Ремзијеве[6] теорије[7], која се налази у настави математике за напредне ученике средњих школа[8]. Ремзијеве радове у области комбинаторике, посебно на тзв. Дирихлеовом принципу, али и уопште у теорији хаоса (случајних процеса), наставио је Моцкин[9] коме се приписује откриће да је комплетан неред немогућ (енг. *complete disorder is impossible*).

Нећемо улазити у детаље тих познатих ставова, осим што ћемо приметити да у довољно великом скупу насумичних речи и слова (на страницама бесмислене књиге), увек можемо наћи малу подгрупу са унапред задатим значењем. Ма како се трудили да неку површину фарбамо бесмисленим мрљама, што је слика већа више ћемо налазити препознатљивих сличица на којима ћемо видети неки смисао. То је препричан садржај теореме коју називамо Ремзијевом.

Ремзијева теорема даје нову тежину ограничењима интелигенције, односно о „остатку“ перцепција које ћемо сада дефинисати.

---

[6]Frank P. Ramsey, 1903-1930, британски филозоф и математичар.
[7]Popular Ramsey: `https://youtu.be/JYyuPITzMgw`
[8]Ramsey Theory: `http://web.mat.bham.ac.uk/D.Kuehn/RamseyGreg.pdf`
[9]Theodore Motzkin, 1908-1970, израелско-амерички математичар.

1.3 Хијерархија

Слобода ℓ је укупна количина могућности, тј. информација о свету у и око себе, коју тело живог бића добија путем перцепција. Интелигенција $\mathbf{i}$ је способност јединке да користи дате могућности. *Хијерархија* $\mathbf{h}$ је способност окружења да јединки ускрати дате могућности. Према томе, хијерархијом називамо сва ограничења слобода јединке, било да она долазе због њених неспособности, због природних закона или од стране друштвених норми.

Приметимо да је слобода ℓ пропорционална и са $\mathbf{i}$ и са $\mathbf{h}$. Као чаша делом напуњена водом, а делом уљем, која је утолико већа уколико су запремине два њена састојка веће. Са друге стране, како је ℓ број, а $\mathbf{i}$ је вектор, то и $\mathbf{h}$ мора бити вектор да би њихов производ могао бити скалар, тј. скаларни производ вектора:

$$\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}. \tag{1.2}$$

Да је $\mathbf{h}$ заиста вектор можемо проверавати и посредно, примерима организовања. Нека група зидара може да направи зид, а затим да га сруши. То подсећа на деловање два вектора истог интензитета и правца а супротних смерова. Иста група зидара се може организовати и у неком трећем смеру.

Нагласимо још једном, вектор $\mathbf{i}$ називамо интелигенцијом јединке и он представља способност јединке да користи дате опције. Вектор $\mathbf{h}$ називамо хијерархијом и он представља немогућност интелигенције да употреби дато, односно хијерархија је способност друштва и окружења у којој јединка живи да јој ускрати те опције.

Међутим, само на први поглед интелигенција јединки даје слободе, а хијерархија их ускраћује. На пример, када мајмун скаче са гране на грану, он то може радити са одређеним циљем захваљујући интелигенцији. Било да му је циљ да дође до хране или да побегне од опасности, избор најбоље следеће гране није више произвољан, насумичан, већ је теран и нужношћу за ефикасношћу. Тако гледајући слобода бирања путем интелигенције постаје неслобода, принуда.

Са друге стране имамо нешто слично са хијерархијом. Само на први поглед смањивање хијерархије представља чисто повећавање слобода. Контра пример био би смањење цивилизацијских слобода појединца у сталном страху да не настрада, у случају дозвољавања насиља и убијања на улицама и друштву уопште. Такође, економисти знају да је уређивањем правила игре на тржишту могуће повећати тржишну конкуренцију, разноврсност понуда и потражњи, па и раст привреде.

Када филозофирамо о интелигенцији као способности коришћења могућности, подразумевамо онај аспект тих способности који је позитиван, као повећање употребе слобода, све док не нагласимо другачије. На другој страни је хијерархија за коју подразумевамо да представља стегу закона, природних и друштвених, који ускраћују дате слободе. Те „изузетке“ је довољно приметити, али се не треба превише бринути око њих, јер формула (1.2) обједињује све потребне аспекте[10].

Друга одлика ове формуле је *дуализам* који следи из комутативности скаларног производа вектора ($\mathbf{i} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}$). Човек је јединка (са интелигенцијом $\mathbf{i}$) у друштвеном

[10] У математичким исказима нема изузетака, они су сви увек садржани у датом.

систему (хијерархије **h**). Међутим, истом формулом човека можемо посматрати и као друштво биолошких ћелија. Формално, није проблем што је тада интелигенција хијерархије (човека) већа од интелигенције јединки (ћелија тела), нити је такве „аномалије“ тешко наћи у природи. Сетимо се само да организација мрава показује знаке веће интелигенције од својих јединки.

Наглашавам да су овде употребљени називи за слободу, интелигенцију и хијерархију помало произвољни, јер не изражавају оно што се од њих очекивало. Они су формални, јер служе за опис релације (1.2) која је откриће и према томе не представља нешто што би нам могло бити познато од раније. Заправо, овде постављамо нове дефиниције појмова слобода, интелигенција и хијерархија, у складу са новим сазнањима, па морамо проћи корак по корак потврђујући оно што је било тачно и исправљајући заблуде у вези са овим новим старим појмовима.

Замислимо количину ℓ из формуле (1.2) опет као чашу у коју сипамо воду **i**, па онда до врха уље **h**. Шта се дешава ако немамо довољно уља (или воде) и чаша остане делом празна? Тада формула није тачна, а то сматрамо неодрживим.

У стварности то нестабилно стање, делом „празне чаше“, може постати страх или тескоба међу јединкама дате врсте које их тера ка новим ауторитетима. Занимљиво је да је управо то неподношљиво стање препознао Ерих Фром 1941. године називајући га „бекство од слободе“. У својој најпознатијој књизи (в. [6]) Фром је описао ирационалне покушаје да се избегне или умањи неподношљиво осећање усамљености савременог човека, а који, заправо, само још више појачавају осећање изгубљености. Он издваја три главна механизма бекства од слободе: ауторитарност, деструктивност и конформизам. Прва два механизма су карактеристична за тоталитарно, а трећи за савремено демократско друштво.

Након 75 година видимо да исти проблем „страха од вишка слободе“ можемо разумети помоћу једноставне, а опет веома опште једнакости (1.2). Пре свега, видимо да то није само проблем психологије, већ и других сила који ће јединке са вишком слободе ℓ усмерити према развоју ка већој интелигенцији **i** или већој стези хијерархије **h** или обема, али тако да поменута формула остане тачна. Оно са чиме још можемо допунити Фромово откриће је универзалност „страха“, која у неком еквивалентном облику мора постојати код свих живих врста, свеједно да ли су настале природним путем, еволуцијом или на вештачки начин, било на Земљи или негде у Свемиру.

Затвореник има умањене способности **i** и повећану стегу **h**, са непријатношћу. Међутим, заљубљени имају сужење свести и повећање привржености, са љубављу. Према томе, и страх и љубав могу да прате промене слободе, што се такође не види из Фромовог тумачења.

Слични проблеми настају и са мањком слободе. Ако је број ℓ на левој страни релације (1.2) мањи од производа десно, тада могу настати, рецимо, побуне. Када јединке не постају глупље, оне одбацују вишак хијерархије која их стеже.

Верујем да иста формула важи и за неживи свет, али тада са даљим новим значењима појмова слобода, интелигенција и хијерархија. О томе ћемо мало касније. Овде нас прво чекају дуге листе посебних примера, од којих ћу покушати издвојити

само карактеристичне или занимљивије.

Свака интересна или иоле организована група привлачи појединце који у датом тренутку имају потребу за ауторитетом. Када ту привлачну силу над усељеником има култура, тада говоримо о асимилацији. Слична стања, са вишком слободе ℓ и немогућношћу повећања $\mathbf{i}$, изазиваће симпатије ка нацији, раси, вери, проузроковаће оданост породици. Неки појединци ће постајати тврди легалисти, други ће своје ауторитете потражити међу криминалним групама.

Таоиста, будиста или монах одлазећи у изолацију искључује неке перцепције и опције, смањујући укупне слободе ℓ. Он на тај начин може доживети мир и спокој изван регулатива друштва, јер је губитак друштвених норми већи, па му остаје слободан простор за нове хијерархије, који затим попуњава телесним вежбама, себи наметнутим ограничењима или појачаном религиозношћу. Губећи нека знања и вештине која би му могла бити корисна у друштву, али не и у самовању, пустињак умањује и своје $\mathbf{i}$ остављајући још више простора за $\mathbf{h}$.

Отуда спокој може бити показатељ равнотеже слободе и регулатива. На пример, док ради са групом ученика наставник може пратити њихово расположење држећи га у оквиру „доброг“ и без екстремних емоција. Повећавајући степен разноврсности (ℓ) он може подстаћи потребу за знањем ($\mathbf{i}$) групе, чак и у случају повећања свог ауторитета ($\mathbf{h}$).

Под разноврсношћу у настави подразумевам оно што би могло повећати перцепције и могућности ученика, па тиме и њихово ℓ. Овде спадају занимљивије градиво, начин предавања, активније учешће слушалаца, повећање локалних слобода. То ће резултирати већом потребом присутних и за знањем и за ауторитетом. Ово друго постаје привржености ученика учитељима која зна трајати.

У случају незадовољења потребе за ауторитетом почеће борбе за доминацијом. Сукоби не могу престати све док се не успостави равнотежа према формули (1.2), уз дељење учесника око појединих лидера. Борба се не тиче само доминантних, већ захвата скоро све присутне, тако да лидер који координише сукоб постаје још мање слободан. Он свесно или несвесно управља својим следбеницима, они га слушају. И вођа и послушници постају (свако на свој начин) неслободни.

То је механизам сукоба који данашња психологија углавном не разуме, држећи да је суштина лечења вршњачког насиља у школама у разговору и доброти, а не наглашавајући да је и сама појава ауторитета психолога или институције та која лечи. За потврду ове тезе наводим понашање банди на улицама. Ма како да су „неурачунљиви“ те бандите успешно контролише њихов вођа. У његовом присуству, без његове дозволе, нема унутрашњих сукоба. Слична је ствар у војсци. Добар старешина, у смислу „таман довољног ауторитета“, може својим војницима поделити оружје без бојазни да ће се они међусобно поубијати.

Посебно је питање шта нас још наводи на решавање „проблема ауторитета“ *миц-по-миц*, како то ради практична психологија? Само један од разлога је потреба лечења посебних група, над којима би сама особа лекара-психолога била недовољан ауторитет, а затим и растући проценат таквих лекара генерисан системом образовања. Демократија „феминизира“ друштво у смислу да све мање толерише особине које

бисмо некада називали „мушкима“. Али, о томе касније.

Пример 1.3.1. *Помоћу формуле (1.2) објаснити производне односе.*

Решење. Робовски рад је замењиван кметовским када је робовласништво постало економски мање ефикасно од феудализма. У складу са једнакошћу $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$, кметови су добили више слободе (ℓ) од робова, уз истовремено повећање свог интелектуалног ангажовања ($\mathbf{i}$), али са незнатним падом контроле ($\mathbf{h}$) од стране земљопоседника.

Још су ефикаснији данашњи радници у демократији, јер је порасла и њихова радна способност ($\mathbf{i}$) и његова дисциплина ($\mathbf{h}$), а што је могуће због веће слободе (ℓ). Ова слобода је порасла не само због неке илузије већих слобода у демократији, већ и због стварног пораста броја избора (опција) услед рада на толеранцијама друштва, али и развоја нових технологија. □

Из наведених примера видимо да „не морамо знати све о свему да би знали нешто о нечему“[11]. Интуитивно или на неке друге начине имали смо делове сазнања о којима овде причамо, али са нејасноћама или грешкама, без сагледавања ширег смисла. Као што је Ајнштајн једном рекао да они „од дрвета не виде шуму“ и не успевају да „ухвате“ целину. Оно што бих овде волео да демонстрирам је огроман број примера које сам наводио у претходним брошурама, тзв. кафанским или фејсбук расправама, а који потврђују релацију (1.2) и, са друге стране, надам се, одсуство макар једне једине контрадикције.

Пример 1.3.2. *Ко су лидери локалних хијерархија?*

Решење. Могућа су оба случаја - када је лидер способан и када није.

Први случај је можда мафијашки бос, добар војсковођа, најбољи хирург именован за шефа хирургије. Због свог већег[12] $\mathbf{i}$ он за себе тражи мање $\mathbf{h}$. Због своје веће радозналости, продорности и уопште способности он може постати харизматични лидер квалитетне групе и управо због тога, али и због тежње да буде у мањој стези хијерархије, он лако долази у сукоб са лидерима шире заједнице.

Други случај је лидер постављен од шире заједнице, рецимо од владајуће политичке групе. Код невеликог $\mathbf{i}$ таквом је лакше натоварити веће $\mathbf{h}$, када он постаје у правом смислу послушник. Већа плата, а понекад и већа радна оптерећења, правдају се повећаном „одговорношћу“ која то заиста и јесте. Нема бриљантних успеха, али нема харизме, нити непослушности, па у стабилном друштву његово отаљавање посла може и да траје. □

Све врсте опажаја, па и емоција, пропорционалне су слободама, као и интелигенција или хијерархија и према томе морају бити садржане у формули (1.2). То смо већ видели расправљајући о Фромовом „страху од слободе“, односно констатујући да тај „страх“ може бити и анксиозност, па и љубав. Опасност и безбедност спадају у ту категорију такође.

[11] Мото брошуре [2].

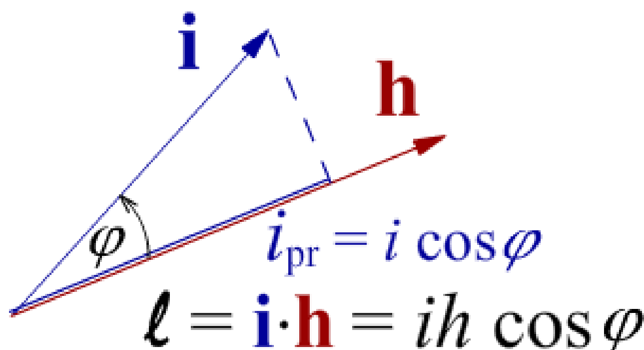
[12] Под „већи“ вектор и даље подразумевамо вектор већег интензитета, при истом правцу и смеру.

1.4 Скаларни производ

Скаларни производ два вектора је производ њихових интензитета и косинуса угла између њих. На слици 1.1 видимо скаларни производ вектора **i** и **h**:

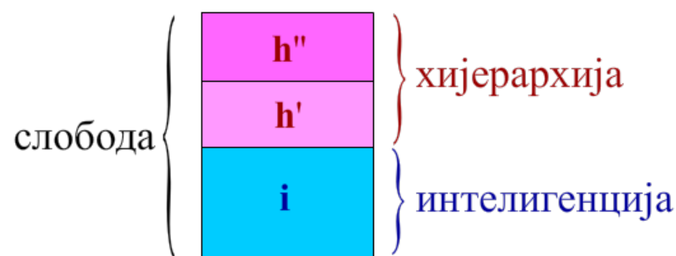
$$\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h} = ih \cos\varphi, \tag{1.3}$$

где су $i = |\mathbf{i}|$ и $h = |\mathbf{h}|$ интензитети датих вектора, а $\varphi = \angle(\mathbf{i}, \mathbf{h})$ угао између њих. Ортогонална пројекција вектора **i** на правац вектора **h** има дужину $i_{pr} = i\cos\varphi$.



Slika 1.1: Скаларни производ

Као што видимо са претходне слике (1.1) - када дужине (интензитети i и h) вектора расту, без промена праваца - те без промене угла φ, пропорционално расте и њихов скаларни производ (1.3), јер је $\cos\varphi$ константан број. Надам се да то разјашњава неке недоумице у претходном разматрању. Следећа, слика (1.2) репрезентација је адитивности хијерархије.



Slika 1.2: Адитивност хијерархије

У претходном тексту смо говорили о чаши која је делом напуњена водом (**i** на слици 1.2), а делом уљем (овде у два слоја **h′** и **h**“), која прави проблеме ако није

напуњена тачно колико течности прима. Сада разматрамо један другачији аспект тог пуњења.

Да је могуће замењивање једне хијерархије другом доказујемо помоћу алгебре вектора. Наиме, када посматрамо хијерархије $\mathbf{h}'$ и $\mathbf{h}$“ у оквиру истог ширег друштва (константне интелигенције и над истим перцепцијама) имамо једнакости:

$$\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{i} \cdot (\mathbf{h}' + \mathbf{h}") = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}' + \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}" = \ell' + \ell", \tag{1.4}$$

које су последица дистрибутивности скаларног множења. Та дистрибуција генерише особину хијерархије коју називамо *адитивност.* На претходној, слици то би значило да повећање хијерархије $\mathbf{h}'$, уз константну интелигенцију $\mathbf{i}$, мора довести до потискивања, смањивања хијерархије $\mathbf{h}$“.

На пример, хијерархије у нашем друштву су породица, религија[13], правни систем. Према (1.3) оне су адитивне, што значи да ће јачање једне хијерархије, рецимо правног система, потискивати и гушити остале две, породицу и религију. Обоје видимо на делу већ данас. Неке државе Европе у којима демократија довољно дуго делује, због „заштите“, већ почињу да узимају себи за право да пресуђују у унутарпородичним сукобима и да одузмају децу родитељима, претпостављајући друштвене законе природним. У сличним европским државама, са развијенијим правним системима, смањује се утицај религије. У исту формулу (1.4) верујемо када желимо да „владавину криминала“ потиснемо „владавином закона“.

Пример 1.4.1. *Објаснити Стокхолмски синдром.*

Решење. Стокхолмски синдром је назив психолошког стања које настаје у ситуацијама у којима долази до зближавања отмичара и талаца. Уклопити то у формулу $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$ изгледа као немогућа мисија. Међутим - није.

У друштву отпадника од закона, наизглед успешних, а који према жртвама нису превише лоши, слаби перцепција вањских ауторитета и замењује је ауторитет отмичара. Та привржeност се појачава адаптацијом (1.11). □

Механизам Стокхолмског синдрома имају разни доживљаји, па и намерне манипулације које нападају наше перцепције. Могуће је баратати неистинама и путем субјективног добијати на објективном плану. Успешна манипулација збуњује опажај, мењајући не само „жељене“, већ и „стварне“ слободе, тј. количине могућности $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$. Ево неколико примера.

1. Када за спровођење закона бирамо мање интелигентне запосленике (у случају друштва стабилне слободе, $\ell = \text{const.}$), можемо очекивати да ће их они боље спроводити, јер ће их (као и ауторитете уопште) боље ценити.

2. Повећање разноврсности градива и наставе може повећати перцепцију слободе ученика, па ће при истој интелигенцији порасти њихово занимање за законе, као и ауторитет наставника. Након увећања ученикових знања ($\mathbf{i}$) може опасти ($\mathbf{h}$), а тако и интерес за учење и моћ школе да учи.

[13]Уз претпоставку да је религија одраз тежње ка ауторитету.

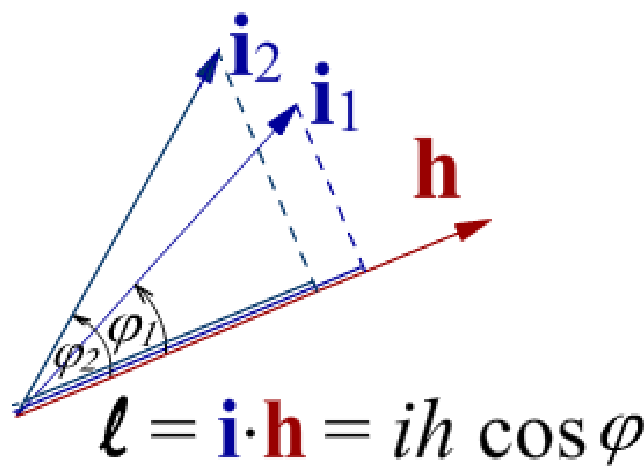
3. Према фирми, као и војсци, чланови морају имати тачно онолико умањену интелигенцију колико осећају њену хијерархију, у случају константних слобода. Наиме, мало њих остаје да ради у фирми (или војсци) када открије да су му личне способности превелике за моћи те установе.

4. Када лидер убеђује народ да ће им освајањем остварити веће слободе (веће ℓ, са истом интелигенцијом народа), он им заправо повећава жељу за хијерархијом, пре свега војном. То му повећава шансе у војном походу. Тако раде успешне империје; када иду у освајање они верују да им та борба даје нове слободе.

5. Протести и демонстрације у демократијама често су знак да људима опада перцепција слободе, рецимо падом стандарда или им расту правна ограничења. Ретко би то могао бити знак пораста интелигенције или потребе за забавом.

У свим овим и сличним ситуацијама, када кажемо „већа“ интелигенција или хијерархија, подразумевамо већи интензитет (модуо, норма) тог вектора. Тако и обрнуто, „умањен“ вектор значи умањен његов интензитет.

Пример 1.4.2. *Објаснити мушко-женске односе као модел ефекат.*



Slika 1.3: Мушко-женски ефекат.

Решење. На слици 1.3 дат је вектор $\mathbf{h}$ и два вектора $\mathbf{i}_1$ и $\mathbf{i}_2$ једнаких интензитета i, али који заклапају различите углове $\varphi_1 < \varphi_2$ са вектором $\mathbf{h}$. Зато ($i\cos\varphi_1 > i\cos\varphi_2$) они имају различите пројекције на дати вектор и различите скаларне производе ($\ell_1 = i_1 h\cos\varphi_1$, $\ell_2 = i_2 h\cos\varphi_2$ и $\ell_1 > \ell_2$).

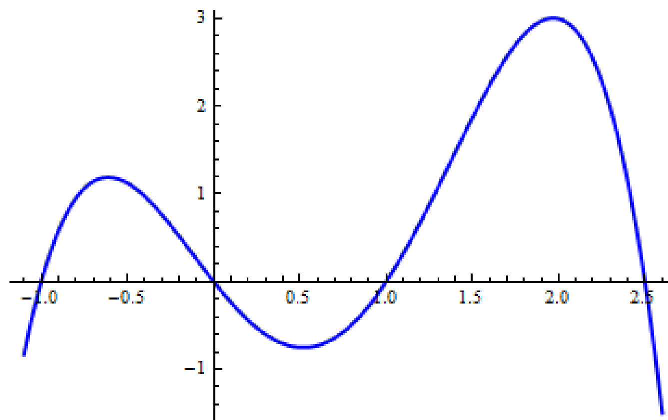
Наиме, друштвена (вањска) хијерархија $\mathbf{h}$ последњих се хиљада година развијала више под доминацијом мушкараца $\mathbf{i}_1$. Ако је она (политика, рат, богаћење) више наклоњена способностима мушкараца, угао $\varphi_1 = \angle(\mathbf{i}_1, \mathbf{h})$ између мушке интелигенције

и водећих друштвених хијерархија мањи је од угла $\varphi_2 = \angle(\mathbf{i}_2, \mathbf{h})$ између женске интелигенције и тих хијерархија. Како је косинус мањег угла већи број (тај број никада није већи од један), то су перцепције мушких слобода веће од женских $\ell_1 > \ell_2$, па жене у таквом друштву имају мање успеха и подносе више ауторитета. □

Наведени пример је поучан, наравно не само због мушко-женских односа, већ уопште, на пример за разумевање различитих култура. Странац нам може изгледати глуп само зато што је неприлагођен. Он се зато може лакше носити са правилима која су нама можда престрога.

Међутим, дугорочно гледајући, групација која је у датом друштву подређена може управо због отежаних услова стасати у способнију, чиме би нестала и потреба за додатном хијерархијом. На пример, леваци у друштву дешњака који су можда мало интелигентнији баш зато што им друштво не иде на руку. Најстарије детете у породици је често за пар IQ успешније од следећег млађег.

Када се вратимо на мушко-женски ефекат сада можда разумемо већу заступљеност жена у судству, или њихове успехе у школству. Треће, када би се друштво мењало (феминизирало) тако да организација (вектор $\mathbf{h}$) постане ближа женском него мушком вектору, тако да угао φ_2 постане мањи од угла φ_1, што је могуће у три или више димензија, жене би се можда у многим другим областима показале успешније од мушкараца.



Slika 1.4: Локални максимуми, за $x_1 \approx -0,6$ и $x_2 \approx 2,0$.

Међутим, ти вектори имају много компоненти, односно има много скривених варијабли које одређују ток еволуције. Друштво се може феминизирати на начин како су то учиниле пчеле. Тежећи сигурности и затварању врста може еволуирати у толико савршену да би свака следећа промена била само назадовање. Као код локалних максимума $y_1 \approx 1,1$ и $y_2 \approx 3,0$ функције на слици 1.4. Да би се од првог стигло до другог већег максимума пролази се кроз ниже ординате функције, што је у случају еволуције корак-по-корак неприхватљиво. Ако остатак живог света еволуира даље, пчеле би се управо због свог (локалног) савршенства могле наћи неприлагођене у окружењу које им више не одговара.

1.5 Адаптација

Нека окружење за неку врсту има групне или појединачне особине $o_1, o_2, \dots, o_n$ за $n = 1, 2, 3, \dots$, а величину интелигенције, односно хијерархије у односу на особину o_k искажимо са i_k, односно h_k, где је индекс $k = 1, 2, \dots, n$, тако да имамо векторе:

$$\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n), \quad \mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n). \tag{1.5}$$

Ово су вектори приказани помоћу *компоненти* у n димензионалном Декартовом правоуглом систему координата $O\xi_1\xi_2\dots\xi_n$. Интензитети тих вектора су редом:

$$|\mathbf{i}| = \sqrt{i_1^2 + i_2^2 + \dots + i_n^2}, \quad |\mathbf{h}| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}, \tag{1.6}$$

па је

$$\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h} = i_1 h_1 + i_2 h_2 + \dots + i_n h_n \tag{1.7}$$

њихов скаларни производ.

Да бисмо боље разумели употребу репрезентације вектора интелигенције и хијерархије помоћу компоненти погледајмо следеће примере.

Пример 1.5.1. *Из два извора излази* 50 *и* 40 *литара воде у јединици времена, од којих ми узимамо редом 20 и 10 одсто текућине. Колико воде укупно узимамо?*

Решење. Означимо $a = 0,2$ и $b = 0,1$ затим $x = 50$ и $y = 40$. Укупно узимамо:

$$\ell = ax + by = 14 \tag{1.8}$$

литара воде у јединици времена. □

Реч „вода“ из овог примера може се заменити са „информација“. Оно што је сада још важније је приметити да су проценти узимања воде били *у складу* са капацитетом извора: са јачег извора смо узели већи проценат. Да је било обрнуто имали бисмо

$$\ell' = bx + ay = 13 \tag{1.9}$$

литара, односно мање воде. Дакле, када су низови усклађени, када већем члану првог низа одговара већи другог, тада је резултат већи. То важи уопште.

Пример 1.5.2. *Доказати да из $a \ge b$ и $x \ge y$, следи:*

$$ax + by \ge bx + ay, \tag{1.10}$$

при чему једнакост важи ако и само ако $a = b$ и $x = y$.

Доказ. Тврђење следи из:

$$(ax + by) - (bx + ay) = (ax - ay) - (bx - by) = (a - b)(x - y) \ge 0.$$

□

Из ових примера видимо да је за векторе $\mathbf{i} = (a, b)$ и $\mathbf{h} = (x, y)$ скаларни производ $\ell = ax + by$ већи ако су они „усклађени“, у смислу да већој компоненти једног одговара већа другог и обрнуто, мањој - мања. Назовимо повећање такве усклађености, у смислу чешћег поштовања датог правила од стране јединке, *адаптацијом.* Може се доказати да је усклађивање, односно адаптација основа *еволуције.*

Пример 1.5.3. *Доказати да је адаптација врсте на околиш заправо њено повећање слободе.*

Доказ. Издвојимо само једно својство S из окружења дате, произвољне врсте. Нека је x вероватноћа да ће јединка преживети ако има особину S, а $y = 1 - x$ вероватноћа да неће. Поред тога, нека је a' вероватноћа да ће се прва генерација јединки понашати у складу са S, а $b' = 1 - a'$ да неће, а затим да је a“ вероватноћа да ће следећа генерација јединки поштовати S, а b“ $= 1 - a$“ да неће.

У првој генерацији је слобода $\ell' = a'x + b'y$, у другој ℓ“ $= a$“$x + b$“y. Одузимањем добијамо ℓ“ $- \ell' = (a$“$x + b$“$y) - (a'x + b'y) = (a$“ $- a')x + (b$“ $- b')y$, затим

$$\ell\text{“} - \ell' = (a\text{“} - a')x - (a\text{“} - a')y = (a\text{“} - a')(x - y) \geq 0. \tag{1.11}$$

То значи да усклађивањем врсте са околином, „адаптацијом“ врсте, расте њена слобода, тј. $\Delta\ell = \ell$“ $- \ell' > 0$ ако и само ако $(a$“ $- a')(x - y) > 0$.

Наиме, из $x > y$ и према томе $x > \frac{1}{2}$, следи a“ $> a'$. Управо је то адаптација на дату особину коју прати повећање слободе ℓ. Исто повећање слободе имамо ако у пару са $x < \frac{1}{2}$ (што значи $x < y$) постоји a“ $< a'$, а то је опет „еволуција у безбедније особине“ исказана другачијим неједнакостима. Обрнуто, ако врста не еволуира ка већим шансама за преживљавање, тада је $x > y$ или a“ $< a'$, па је слобода мања, $\Delta\ell < 0$. Такође из $x < y$ и a“ $> a'$ уследио би пад слободе, $\Delta\ell < 0$. □

Отуда важан закључак да су еволуција, адаптација и повећање слободе еквиваленти. Еволуција је усклађивање особина јединке ($\mathbf{i}$) и околине ($\mathbf{h}$) тако да њихов производ ($\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$) расте, а то је пораст објективне, стварне количине могућности у односу на дату врсту. Живот тежи слободи!

Да закони не морају бити само природни, већ могу бити и друштвени, видимо из следећег примера. Рецимо да на неком путу стоји саобраћајни знак ограничења брзине 60 km/h, за који су саобраћајни инжењери проценили да гарантује безбедну вожњу (у случају вожње не брже од наведене) са вероватноћом $x = 0,95$. Другим речима, од 100 возача који се придржавају ограничења, само њих 5 би могло имати проблем у вожњи, нпр. удес на том месту. Тада је вектор $h = (x, y)$ где је $y = 1 - x = 0,05$ вероватноћа да вожња неће бити безбедна у случају кршења забране.

Адаптацију возача на постављену забрану можемо мерити као фреквенцију броја возача који су се придржавали ограничења. Нека се у првим мерењима показало да је вероватноћа придржавања ограничења од стране возача била $a' = 0,7$ (што значи вероватноћу непридржавања $b' = 1 - a' = 0,3$), а у другом мерењу a“ $= 0,8$ (b“ $= 0,2$), тада су по тој ставци слободе прве и друге групе возача биле:

$$\ell' = a'x + b'y = 0,68, \quad \ell\text{“} = a\text{“}x + b\text{“}y = 0,77. \tag{1.12}$$

Дакле опет, боља адаптација даје већу слободу.

Да заиста можемо анализирати овако одвојене ставке, компоненете вектора (1.5) видимо из њихових следећих алгебарских особина. Нека су дата два пара вектора са по пар координата: први $\mathbf{a}' = (a_1, a_2)$ и $\mathbf{b}' = (b_1, b_2)$, а други пар $\mathbf{a}$“ $= (a_3, a_4)$ и $\mathbf{b}$“ $= (b_3, b_4)$. Тада је $\ell = (a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$, тј.

$$\ell = (a_1b_1 + a_2b_2) + (a_3b_3 + a_4b_4) = (a_1, a_2) \cdot (b_1b_2) + (a_3, a_4) \cdot (b_3, b_4) = \ell' + \ell``, \quad (1.13)$$

односно $\ell = \ell' + \ell$“. То је адитивност при надовезивању парова компоненти, за разлику од претходне адитивности само једног од вектора у скаларном производу. На овај начин се могу уопштити претходни примери, али могу и другачије.

Пример 2.3.1 можемо поопштити на n-димензионални векторски простор поменут на почетку ове секције. Пре тога подсетимо се неколико појмова комбинаторике.

Различите редоследе неке n-торке називамо пермутацијама. На пример, $(1, 2, 3)$ има шест пермутација:

$$(1, 2, 3) \quad (1, 3, 2) \quad (2, 1, 3) \quad (2, 3, 1) \quad (3, 1, 2) \quad (3, 2, 1).$$

Уопште, n-торка има $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ пермутација[14]. Шта се догађа са збиром производа (1.7) када су компоненте вектора хијерархије поредане по величини, али компоненте интелигенције нису?

Претпоставимо да су низови (1.5) поредани са лева у десно, од највећег ка најмањем. Из примера 2.3.1 следи да свака замена места пара $i_k \geq i_j$ испред фактора $h_k \geq h_j$ смањује укупни збир (1.7). Тако за $n = 3$ добијамо:

$$i_1h_1 + i_2h_2 + i_3h_3 \geq \underline{i_2}h_1 + \underline{i_1}h_2 + i_3h_3 \geq i_2h_1 + \underline{i_3}h_2 + \underline{i_1}h_3.$$

На тај начин доказујемо опште, следеће тврђење.

Теорема 1.5.4. *Ако је $i_1 \geq i_2 \geq \cdots \geq i_n$ и $h_1 \geq h_2 \geq \ldots h_n$, тада је:*

$$i_1h_1 + i_2h_2 + \cdots + i_nh_n \geq i_{k_1}h_1 + i_{k_2}h_2 + \cdots + i_{k_n}h_n, \quad (1.14)$$

где је $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ пермутација n-торке $(1, 2, \ldots, n)$.

Доказ. Последњи индекс (ако $k_n \neq n$) на десној страни производа (1.12) потражимо (међу i-овима) лево, затим пермутујмо тај фактор са суседним десно, па опет са суседним десно док он не стигне на своју крајњу десну позицију. Поновимо исти поступак са следећим крајњим десним индексом (ако $k_{n-1} \neq n-1$). Са коначно много (мање од n) понављања оваквих поступака добијамо тражену неједнакост. □

Због комутативности сабирања сабирци не морају бити поредани да би важила неједнакост (1.12). Довољно је да су низови **i** и **h** „усклађени“, на начин да већем члану једног одговара већи другог.

[14] $n!$ чит. „ен факторијел“

Да бисте поопштили (1.11) на произвољне n-торке особина, из којих следе вектори (1.5), можете посматрати парове слично доказу претходне теореме. На тај начин се долази до општег закључка да адаптацијом на околину јединка добија на слободи. При томе адаптација значи рађе кориштење правила понашања која намеће околина, а околина је представљена законима који, ако се поштују, обезбеђују јединки веће шансе за преживљавање.

У томе свему необична је веза између прилагођавања у циљу преживљавања и повећања слободе због адаптације. Чудно да у еволуцији „преживљавати“ значи исто што и „ослобађати“ се у смислу повећавати број $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$. Рекли смо да је тај број ℓ информација коју јединки дају њене перцепције. Овај резултат је данас (2016. год.) толико неочекиван да га морамо покушати боље разумети.

Нека су особине $o_1, o_2, \dots, o_n$ случајни догађаји, са информацијама редом:

$$h_1, h_2, \dots, h_n. \tag{1.15}$$

Не бавећи се, за сада, дефинисањем тих информација, видимо да су поменуте особине исте оне могућности, односно избори о којима смо и до сада причали. Нека је p_k вероватноћа кориштења особине o_k јединке дате врсте, тако да је

$$p_1, p_2, \dots, p_n \tag{1.16}$$

расподела вероватноћа, тј. $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Максимална слобода

$$\ell = p_1 h_1 + p_2 h_2 + \dots + p_n h_n, \tag{1.17}$$

биће за усклађене компоненте вектора $\mathbf{i} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ и $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$. Другим речима, јединка је слободнија ако чешће бира информативнију особину.

То на први поглед као да нема везе са опстанком, али видели смо да еволуција значи преживљавање, а оно значи слободу. Међутим, ако уместо на одржање врсте, за бит еволуције узмемо борбу за слободом, ове везе постају јасније. Већом информацијом јединка повећава своју слободу, а тиме и шансе за преживљавање!

На крају нам је остало да видимо шта је то (математичка) информација.

За две ($m = 2$) једнаке могућности, као у случају бацања фер новчића, вероватноћа реализације сваке од њих је $p = \frac{1}{2}$. Међутим, два није број информација таквог случајног догађаја (бацања новчића), јер сазнањем да се десио један исход сазнали смо и да се није десио други. Зато је Хартли 1928. године информацији „пало је писмо“ (односно „пала је глава“) доделио вредност један. То је логаритам по бази два од броја два, $\log_2 2 = 1$.

За четири ($m = 2^2$) једнаке могућности, рецимо четири избора једног од бројева $1, 2, 3$ или 4 вероватноћа је $p = \frac{1}{4}$. Довољна су само два тзв. бинарна питања да се сазна резултат, реализација једне од такве четири равноправне случајности. Поделимо бројеве у две групе по два, рецимо $\{1, 2\}$ и $\{3, 4\}$. Прво питање је: да ли је тражени број у првој групи? Када је одговор „не“ тражени је број у другој групи. Друго питање је: да ли је тражени број 3? Ако је одговор „да“ то јесте тражени број, ако је одговор „не“ тражени број је 4. Према томе, информација

коју доноси реализација једног од четири случајна исхода износи 2. Приметимо, $\log_2 4 = 2$, односно $\log_2 p = -4$.

За осам ($m = 2^3$) једнаких случајности, рецимо бројева $\{1, 2, \dots, 8\}$, вероватноћа избора једног је $p = \frac{1}{8}$. Да бисмо га пронашли, поделимо осам бројева у две групе по четири, па првим питањем одредимо у којој је тражени број. Тако добијамо једну групу са четири случаја са којима можемо наставити тражење на претходни начин. Већ смо видели да су за четири броја довољна само два (бинарна) питања, што значи да је укупна информација три. Приметимо да је $\log_2 8 = 3$.

Уопште, за $m = 2^h$ једнаких случајних исхода вероватноћа једног је $p = \frac{1}{m}$, а информација:

$$h = -\log_2 p. \tag{1.18}$$

То је Хартлијева[15] дефиниција информације која важи за $m = \frac{1}{p}$ једнаковероватних исхода. Према томе слобода (1.17) постаје:

$$\ell = -p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2 - \dots - p_n \log_2 p_n. \tag{1.19}$$

Ту форму информације открио је Шенон[16] 1948. године. Информација је данас средња вредност (математичко очекивање) Хартлијевих информација (1.18), при чему база логаритма може бити било који реалан број $b > 0$ и $b \neq 1$.

Када је база логаритма (1.18) број $b = 2$ имамо бинарну информацију чија јединица је *бит*. Када је $b = 10$ имамо декадну информацију са јединицом *децит*. Међутим, најчешћа база логаритма је Ојлеров[17] број $e = 2,718281\dots$ са јединичном информацијом *нат*. Множећи Хартлијеву информацију (1.18) константом $\lambda = \log_b 2$ мењамо базу логаритма (1.18) у b, јер је:

$$h' = \lambda h = -(\log_b 2)(\log_2 p) = -\log_b p. \tag{1.20}$$

Тада и Шенонова информација прелази у јединице са базом b, али увек остаје дефинисана над расподелама вероватноћа (збир свих p-ова је један). Међутим, она нама неће бити довољна.

За сада приметимо само да у нашем телу истовремено ради више хиљада процеса који су скоро сви несвесни. То су процеси управљања крвотоком, разним разменама, радом јетре, варењем. Тако раде и наша подсвест и свест. Зато ми можемо истовремено да ходамо, причамо и једемо. То називамо *мултипроцесирање*, за разлику од *мултитаскирања* које означава рад једног процесора наизменично над више података.

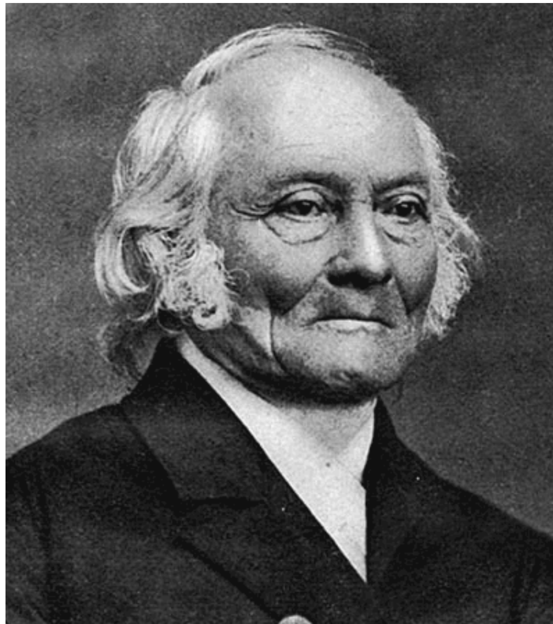
Шенонова информација добро дефинише мултитаскинг, али је она, нажалост, веома компликована за мултипроцесинг који нам је овде потребнији. Заправо, сама *свест* за коју желимо да верујемо да је мултитаскинг резултат је хиљада несвесних процеса (којима не можемо управљати) и који формирају илузију. Када мислимо да смо донели неку одлуку, наша подсвест нам је послала поруке, припремљене пар

[15] Ralph Hartley (1888-1970), амерички електроинжењер.
[16] Claude Shannon (1316-2001), амерички математичар.
[17] Leonhard Euler (1707-1783), швајцарски математичар.

секунди раније, да ћемо мислити да ћемо донети ту одлуку. Та „превара“ подсвести резултат је мноштва процеса, добре организације ћелија ниске интелигенције које чине један колектив, нас лично.

1.6 Експерименталне потврде

За разлику од претходних разматрања која су великом већином била оригинална моја и сасвим нова, текст у овој секцији то није. Овде су колико-толико детаљно описана само два позната открића у домену људских перцепција, која би требала да потврде интуицију оснивача математичке теорије информације, пре свега Хартлија и Шенона. Прво је *Веберов закон* за праг осетљивости наших чула, а друго је начин како се у астрономији ради класификација звезда по сјају.



Slika 1.5: Ernst Heinrich Weber (1795-1878).

1. Унутар савремене психологије постоји дисциплина која се назива психофизика, а која се бави проучавањем опажаја. Израз „апсолутна осетљивост“ односи се на могућност (способност) детекције подражаја из околине. Апсолутни *лимен*, праг осетљивости, најмања је количина енергије коју човек може осетити. То је количина светла код вида, јачине звука код слуха, притиска код додира.

Диференцијална осетљивост је могућност разликовања подражаја. Мера такве осетљивости назива се диференцијални лимен или праг осећаја, који се у класичној психофизици првенствено односио на димензију интензитета. То је најмања разлика у интензитету два подражаја исте врсте које испитаник може тек разликовати у

50 одсто случајева. Прва открића у том подручју направио је Вебер[18], мерећи диференцијалну осетљивост тежина.

Вебер је 1834. године открио (статистичку) закнитост прага осећаја:

$$\frac{\Delta W}{W} = \kappa, \tag{1.21}$$

где је ΔW потребан прираст у интензитету надражаја да би разлика доживљаја била тек примећена, W је интензитет нивоа надраживања, а κ је константа. Другим речима, ако је испитаник при тежини тега од 50 грама могао приметити варијацију његове тежине тек повећањем за 1 грам, онда би он при тежини од 100 грама могао приметити варијацију тежине тек око 2 грама.

Веберова константа κ, десно у једнакости (2.5), за електричне надражаје износи 0,01; за тежину износи 0,02; за дужину линија 0,03; за јачину звука 0,04; мирис 0,05; светло и укус (слано) 0,08. Како су то приближно мали бројеви, збир f редом свих прагова од најнижег, апсолутне осетљивости W_0, до датог износа W, може се проценити интегралним рачуном (1.21). Добијамо:

$$f(W) = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{W}{W_0}. \tag{1.22}$$

То је Фечнеров[19] закон из 1860. године. Приметимо да је количина опажаја $f(W)$ формално једнака Хартлијевој информацији, те да она представља и количину могућности, односно слободе датог чула.

Због адитивности слободе, сада при различитим способностима $\mathbf{i}$ индивидуе у константној хијерархији $\mathbf{h}$, процењујемо да се перцепције наших чула такође додају простим сабирњем у укупну слободу ℓ. За $n = 1, 2, 3, \dots$ различитих чула ови укупни опажаји били би $f_1, f_2, \dots, f_n$, а њихова средња вредност:

$$f = p_1 f_1 + p_2 f_2 + \dots + p_n f_n, \tag{1.23}$$

где је p_k вероватноћа употребе k-тог чула, редом за $k = 1, 2, \dots, n$.

2. Прву класификацију звезда по сјају дао је *Хипарх* у II веку пре нове ере. Он је поделио звезде видљиве голим оком у шест класа или *магнитуда* тако да су најсјајније звезде биле у првој, а најслабије у шестој магнитуди. Након Веберовог и Фечнеровог закона за сва чула, у 19. веку је постављен математички израз за Хипархову класификацију:

$$U = C^R, \tag{1.24}$$

да геометријској прогресији надражаја (узрока U) одговара аритметичка прогресија реаговања чула (R), при чему је C нека константа. Овај општи закон је Погсон[20] 1856. године применио у астрономији.

---

[18]Ernst Heinrich Weber (1795–1878), немачки лекар.

[19]Gustav Theodor Fechner (1801-1887), немачки физичар и филозоф.

[20]Norman Robert Pogson (1829-1891), енглески астроном.

Означимо са E_m осветљеност звезде привидне величине, магнитуде m. Мерењем је утврђено да је осветљеност звезде прве магнитуде 100 пута већа од осветљености коју даје звезда шесте магнитуде, па је добијено $\log C = 2,5$. Затим налазимо:

$$m_1 - m_2 = 2,5 \log \frac{E_2}{E_1}, \tag{1.25}$$

где је E_2/E_1 однос осветљености измерених за два светлосна извора магнитуда m_2 и m_1. То је Погсонов закон.

У астрономији су настојали нове резултате уклопити у старе, да звезде шесте привидне величине буду на граници видљивости голим оком. Међутим, многе звезде прве величине знатно се разликују по сјајности, па је Хипархова скала проширена и на негативне бројеве. Тако је привидна величина Сиријуса, најсјајније звезде не небу, $m = -1,4$; пуног Месеца $m = -12,6$; Сунца $m = -26,8$.

Да су количине опажања логаритамске величине, попут информације или слободе, више и није нека новост. Међутим, ова идеја у астрономији иде и даље, на процене „чистих“ физичких величина, каква је рецимо *луминозност*, тј. укупна количина енергије коју звезда израчи са своје површине у јединици времена:

$$L = 4\pi R^2 F(R), \quad L = 4\pi R^2 \sigma T^4, \tag{1.26}$$

где је лево $F(R)$ флукс зрачења звезде радијуса R, а десно исти израз са претпоставком да звезда зрачи као апсолутно црно тело температуре T. Користећи (2.9) сада добијамо:

$$M_1 - M_2 = 2,5 \log \frac{L_2}{L_1}, \tag{1.27}$$

где су M_1 и M_2 апсолутне звездане величине. Највећи број звезда има апсолутне звездане величине у границама $-6 < M_v < +10$.

Тако добијамо за Сунце $M_v = +4,8$ ($m_v = -26,8$), Сиријус $M_v = +1,5$ ($m_v = -1,4$), Вега $M_v = 0,5$ ($m_v = +0,1$), Алфа Центаури $M_v = +4,7$ ($m_v = +0,3$).

Glava 2

Демократија

Демократија је систем владања који укључује народ у бирање својих владара. Према фрази америчког председника Абрахама Линколна: „Демократија је влада народа, од народа и за народ“. У ужем смислу, демократију има друштво у којем је одређеној групи лица дато једнако право да бирају и да буду бирани у органе политичке власти.

Реч „демократија“ је настала од грчког *demos* - народ и *kratein* - владати, што би значило владавину народа. Израз је настао у 5. веку п.н.е. када је у Атини око 16 одсто од укупног друштва имали право гласа. Демос, односно народ који је имао право гласа, у Атини је доносио одлуке директно, референдумом. Сваки припадник демоса имао је право на један глас у свакој од таквих одлука. То је била тзв. *непосредна* демократија.

Током историје су се појављивали различити облици демократије. Већ су и сами Атињани од 487 - 486. г.п.н.е. побољшавали своју демократију помоћу магистрата који су изједначавани са носиоцима власти, али су били бирани бацањем коцке. Ипак, демократија има толико лоших страна да се жеља за влашћу демоса временом трошила и власт равноправних је препуштана ауторитетима.

Римска Република (око 300 - 50. г.п.н.е. до Римског Царства) била је демократија. У западној Европи су у 12. и 13. веку често бирани различити носиоци власти гласањем народа. Почев од локалних посланика, преко начелника области до краљева, па чак и папе. То је трајало све до екстремног јачања ауторитета римокатоличке цркве и Инквизиције, након чега су завладале европске Монархије. Француска револуција 1789. године до императора Наполеона била је ношена идејама слободе и либерализма. Током 19. и 20. века су се на теоријама Маркса[1], али и тумачењима Енгелса[2] и на пракси Лењина[3], појавиле комунистичке земље са демократским бирањем у оквиру чланова комунистичке партије. Све комунистичке владавине су завршиле диктатуром.

Прва савремена демократија настала је поменуте 1789. године, али у Сједињеним

[1] Karl Marx (1818-1883), немачки филозоф.
[2] Friedrich Engels (1820-1895), немачки филозоф.
[3] Vladimir Lenjin (1870-1924), руски комунистички револуционар.

Америчким Државама. Модерна демократија је систем власти у којем коначна политичка власт, суверенитет, припада народу, било директно или путем изабраних представника. У савременим демократијама „демос“ представљају сви пунолетни држављани, који равноправно (један човек - један глас) бирају своје представнике, а који затим одређени број година владају у име народа. То је *посредна* демократија.

У наставку текста ћемо видети како идеја равноправности доводи до неких жељених последица демократије, али и њених девијација. Напомињем да су у годинама уочи писања овог текста такве девијације у друштву углавном сматране проблемима које треба отклањати са више демократије, а не њеним последицама. Нагласићемо и неке тешкоће идеје равноправности појединаца у условима немогућности њихове стварне једнакости.

2.1 Либерализам

Либерализам је најчешће заједнички назив за политичке идеологије државног уређења које тежи што већој слободи појединца, често путем демократије а под заштитом правне државе. Реч „либерал“ потиче од латинске речи *liber* (слободан). Либерали свих школа себе виде као заштитнике слободе.

Из претходног текста и чињенице да су тезе постављене у тим разматрањима сасвим нове, можемо претпоставити да су први теоретичари либерализма морали доћи из средина са превеликом стегом хијерархије и то када се није могло разумети да би и мањак тих стега могао бити проблем. Када се подсетимо на оно што се у филозофији сматра „либерализмом“, приметићемо да исте последице имају сва кретања друштва у којима се слепо тежи слободама, са погрешним убеђењем да више слободе увек значи и више среће људима.

Сматра се да се први истински либерали појављују у *просветитељству*. То је европски интелектуални покрет 17. и 18. века који је вршио синтезу идеја о богу, разуму и природи у области уметности, филозофије и политике. Просветитељи су славили разум човека, са његовим главним одликама - знањем, слободом и срећом. Међу либералима су се истицали британски *виговци*, противници апсолутне власти у парламентима шездесетих година 17. века. Виговци су преузели пуну контролу над владом остајући доминантни све до краља Џорџа III 1760, који их је онемогућио и вратио торијевце. Покрет за независност у америчким колонијама такође се сматра либералним.

Либерали су се супротстављали апсолутној монархији, меркантилизму, неким облицима религијског правоверја и клерикализму. Они су по први пут установили концепте права појединаца и владавине права, те важност управљања државом преко изабраних представника. Либерализам као свесна идеологија да слобода није тек додатак, већ фундаментална основа права унутар политичког ентитета, и касније државе, почео је да поприма јаснији облик као одговор апсолутизму, нарочито у Уједињеном Краљевству. Две расправе о влади Џона Лока (1632-1704) установиле су две фундаменталне либералне идеје: економску слободу (право на

поседовање и коришћење имовине) и интелектуалну слободу (укључујући и слободу савести). Ипак, Лок своје ставове о верским слободама није ширио и на католике.

Истовремено, француски филозофи долазе до идеја да је потребно законима ограничавати и власт монарха, а обрнуто, економски либерали износе супротне идеје о „хармонију“ тржишта, држећи да тржиште треба оставити на миру, односно пустити га да иде својим током. На континенталној Европи либерализам као идеологија настаје са Француском револуцијом и идејама о минималној држави, о држави која је јака, али јој је домен деловања мали и своди се на обезбеђење мира и сигурности.

Уопште, либерализам је изворна идеологија грађанског друштва, настала у 17. и 18. веку, у тежњи те класе да оствари своја политичка права, да укине привилегије и самовољу власти. Француска револуција је прогласила слободу за највиши идеал друштва, а слично томе и остали западни либерали. У средишту либерализма налази се појединац који своје грађанске слободе остварује у економској, политичкој и културној сфери друштва. За разлику од социјализма или конзервативизма, либерализам се темељи на идејама личне слободе и личног избора.

Овде говоримо о либерализму као политичкој филозофији заснованој на слободи и једнакости. Док класични либерализам наглашава важност слободе, социјални наглашава важност једнакости све до права државе да надзире приватни живот појединца. Шире, либералним се сматра и отвореност према новим идејама и друштвеном експериментисању насупрот конзервативизма који се залаже за држање на традиционалним принципима. Економски либерализам је залагање за што мање државне интервенције у економији.

Када бисмо били још комотнији могли бисмо „либералним“ назвати сваки покрет за слободу који прецењује права на лични и избор и подцењује потребу јединке за хијерархијом. Сваки такав либерализам, па и онај познати, мора завршити неким стегама хијерархије утолико јачим и утолико брже колико је био искренији и енергичнији. Сличан закључак се односи на сва жива бића, али се осврћемо само на примере из наше (људске) историје.

Мање је познато да је у Европи у средњем веку била честа пракса правих демократских избора. Након пада Римског царства (476. године), па до пада Константинопоља 1453. године, Европа је следила хришћанске идеје о људима који су сви створени једнаки. Доследно томе, није била ретка појава да се разни лидери повремено бирају гласањем равноправних. Тако су бирани прваци места, регије, па чак и папа. Са друге стране, знамо да је то био период огромног јачања верског морала, религијских догми и норми и, на крају, Инквизиције. Период монархија био је можда одговор на страховладу католичке религије која се том приликом размахала.

Искрени либерализам Француске раволуције из 1789. године великом брзином се завршио 1804. године са императором Наполеоном. У основи, либерални су били и фашизам и нацизам такође, који су се завршили страшним диктатурама Мусолинија и Хитлера. У том ширем смислу и комунизам је био либерализам, а скоро сваки је брзо грабио ка диктатури. Данашња америчка демократија којој све више одговара

назив „либерални капитализам“, такође јури под стегу моћних фирми, корпорација и банака тако да би масама управљали малобројни.

Либерализам је „пут у пакао поплочан добрим намерама“, али не само у хришћанству. *Калифат* или хилафет је исламски облик власти који представља политичко јединство и вођство исламског свијета. У прошлости их је било пуно (Рашиди - праведни калифат, династија Омејада, затим Абасиди, Фатимидски, па до Османлијског који је трајао све до 1924. године). 29. јуна 2015. године, Абу Бакир ал-Багдади, вођа тадашње Исламске државе Ирака и Леванта, а од тада Исламске државе, прогласио је светски калифат. То је облик исламске државе коју предводи калиф, што значи надзорник, онај који се брине о домаћинству владара (Бога).

Оригинални начин избора калифа (код сунита) био је крајње демократски и није био наследан, пошто је калифа бирала *шура*, односно врховни исламски савет, који је опет са своје стране био биран нижим саветима која су се бирала још нижим и тако до самог дна пирамиде. И у томе је проблем, управо у демократији, односно либерализму (у ширем смислу), која пре или касније произведе неку врсту аутократије, али често злу, попут данашњег Даеша, односно Исламске државе (ISIL).

Либерални пројекти из прошлости су једнострани. Они су пропадали, јер слободу ℓ (количину могућности) нису видели кроз целу формулу $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$, него су непознајући је величали само интелигенцију **i** (способност појединца да користи могућности), а игнорисали значај оног другог фактора, хијерархије **h** (способности окружења да блокира могућности). Као дете које ставља терет на само једну страну клацкалице, без разумевања концепта равнотеже. Зато би им се дешавало да та друга страна снажно одскочи, затичући острашћене либерале који би слепо верујући у своје схватање слободе често поново покушавали исто.

Међутим, на прелазу из 20. у 21. век, моћници који путем банака и корпорација управљају пре свега Америком као да су приметили користи од либералних покрета у свету. Либералним срединама је лако манипулисати од стране хијерархија тих моћника, па је америчка доктрина постала „ширити демократију милом или силом“ ради пљачке. Анализираћемо ту појаву укратко.

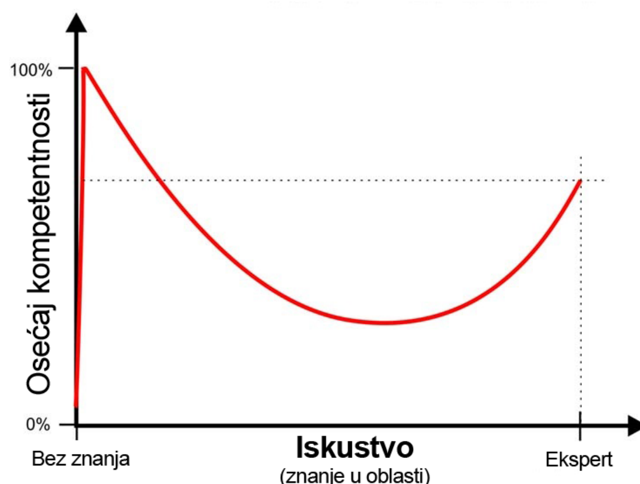
Познато је да двоје могу да ураде више посла него само једна особа, али две главе нису увек паметније од једне. Наиме, већ је Фром[4] приметио 1941. године да је памет демократске масе мања од памети просечног појединца из те масе, што је затим била тема многих расправа и експеримената. Ево једног теоријског доказа тог Фромовог става.

Данинг-Кругеров (Д-К) ефекат је когнитивни поремећај када особе са мањком вештина и знања у некој области пате од илузорне супериорности, грешком верујући да су њихове вештине много веће него што заправо јесу[5].

На слици 2.1 види се (црвена линија) како повећањем искуства (знања у области) опада осећај компетентности да би тек негде са знањем блиским експерту тај осећај почео да полако расте. Следи пример утицаја овог ефекта на интелигенцију групе особа као целине у односу на интелигенцију појединца.

[4] Erich Fromm (1900-1980), немачки филозоф.

[5] Daning-Krugerov efekat: `https://sr.wikipedia.org/wiki/Daning-Krugerov_efekat`



Slika 2.1: Данинг-Кругеров ефекат.

Пример 2.1.1. *Показати да Д-К ефекат чини двоје људи глупљом од једног.*

Решење. Посматрајмо две особе A и B одвојено, а затим као групу AB на неком тесту интелигенције од само пет питања.

Нека је свака од особа на последња три питања дала исте одговоре, од којих су два тачна ($\top$) и једно нетачно ($\perp$), као на слици 2.2. На прва два питања особа A је одговорила редом тачно и нетачно, а особа B нетачно и тачно. Тако свака од особа A и B појединачно има по три од пет тачних одговора.

Након појединачног одговора ове особе се договарају и дају још један одговор који представља одговор групе AB. Оптимално за успех групе било би да предложе исти заједнички одговор на последња три питања теста, али се око прва два морају договарати.

A	T	⊥	⊥	T	T	3/5
B	⊥	T	⊥	T	T	3/5
AB	⊥	⊥	⊥	T	T	2/5

Slika 2.2: Резултат тестирања.

Тада наступа Д-К ефекат. На првом питању особа B има мање знања и већу моћ убеђивања, па они као заједнички одговор прихватају (погрешан) предлог особе B.

На другом питању обрнуто, особа A има мање знања и бива убедљивија, па група за друго питање даје такође погрешан одговор. Дакле, укупни резултат групе је два тачна од пет, што је горе од резултата (3 од 5) сваког од појединаца.

Слично би се десило да су ове особе на прва два питања дале такође различите одговоре, али да је A одговорила два пута тачно, а B ниједном. Опет је заједнички скор два од пет, тј. мањи од просека појединачних. □

Разлог мање памети групе од њених појединаца био је Данинг-Кругеров ефекат и либерално одлучивање. Да је група хијерархијски уређена, онда би се под притиском ауторитета остали чланови слагали са мишљењем лидера и изостао би Д-К ефекат. У случају да је лидер барем просечне памети, резултат групе био би бар просечан. Зато се фирме и војске организују хијерархијски.

Моћне корпорације се у демократијама осећају као ајкуле међу ситном рибом. Оне су прво овладале америчком администрацијом, а затим су је као паразити почели користити за стицање све више новца и више моћи. Отуда снага и доминација Америке у 20. веку, из симбиозе њене почетне демократије и насталих корпорација (банкарство се подразумева). Тако ојачана, Америка је препознала користи од заговарања демократије у остатку света и као свака успешна империја она је почела да користи комбинацију те нове утопије и, наравно, своје војне силе.

Наводна америчка борба за људска права и увођење демократије „милом или силом“, постала је најстрашнија мора земаља које се више нису могле одупрети тој моћи. Ако би се државе означене као плен зачахуриле и покушале устројити хијерархијски ради ефикасности и боље одбране, било би то недовољно пред ударима ратне машинерије Западне Алијансе, а ако би попустили и прешли на демократију „земаља у транзицији“, онда би тек постали немоћни под манипулацијама бездушних интересних корпорација.

Демократија је постала најважније ратно средство. Крајем 20. века Америка је спојила два најважнија предуслова потребна свакој успешној империји: имала је привлачну утопију и имала је снажну војску. Међутим, већ почетком 21. века показале су се пукотине на америчкој доктрини. Након „увођења демократије“ Ираку (против Садама Хусеина), Либији (против Муамера Гадафија), у Авганистану, изостајало је побољшање. Свет је почео примећивати да су и „жуте револуције“ режија америчких грабежљиваца, те да у низу сличних интервенција пре и после наведених Америка доноси само разарање држава и беду становништву, а односи профит. Па је онда и тај профит постајао упитан.

Утопија је замишљено место, држава или стање у којој је све савршено. Реч „утопија“ је сковао Томас Мор из грчког „оу“ - не и „топос“ - место, за идеалну земљу у својој књизи „Утопија“ из 1516. године. Након објављивања Морове књиге о најбољем уређењу државе појам „утопија“ је постао синоним за све замисли које истражују могућност идеалног решења, било организације државе, односа међу људима или престанка било каквих сукоба и ратова, али у пракси до сада нису остварене, без обзира на покушаје.

Демократија је савремена утопија. Као и претходне идиличне грађевине из прошлости, она ће такође пре или касније постати рушевна, јер су јој темељи лажни.

Основни принципи демократије: слобода, једнакост, равноправност и држава закона, сви говоре о људима, јединкама колектива, али, као што ћемо ускоро видети, на начин који није у складу са формулом $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$.

2.2 Равноправност

Људи имају различите особине: висину, тежину, боју косе, карактер, а неке вредности тих особина се могу наћи код два или више појединаца. Ана и Бранко могу истог дана славити рођендан, иако можда немају исти број година, нису истог пола, а не морају се ни познавати.

Када две особе A и B имају неку особину „о“ једнаку, онда можемо рећи да су те две особе *једнаке* у односу на дату особину. То можемо формално писати $\rho(A, B)$ или $A\rho B$. Оба начина подсећају на математичку *релацију* једнакости због чега је можемо писати $A = B$. Употребом математичких форми добијамо екстремну могућност прецизног изражавања.

Након избора произвољне, али даље фиксиране особине o, свака од једнакости је нека *релација еквиваленције*. Она се уобичајено означава са „~“ и увек има следеће три особине, важеће за сваког A, B или C:

1. рефлексивност: $A \sim A$,
2. симетрија: ако је $A \sim B$ онда је $B \sim A$,
3. транзитивност: ако је $A \sim B$ и $B \sim C$ онда је $A \sim C$.

На пример, ако је дата особина „националност“, онда $A \sim B$ читамо „особе A и B су исте националности“.

Зашто је потребно екстремно прецизно изражавање? Због велике осетљивости последица одређених динамичких система (који се „развијају“ током времена) на почетне услове. То је открио амерички математичар Лоренц[6], оснивач математичке теорије хаоса. Та осетљивост се због наслова (да покрет крила лептира у Бразилу може резултирати торнадом у Тексасу) његовог прилога[7] из 1972. године популарно назива *ефекат лептира*.

Насупрот *нестабилности* ефекта лептира, Курамотов[8] модел описује *стабилну равнотежу*. Он је проучавао[9] системе који воде до синхронизације која се јавља у одређеним ситуацијама када се хаос спонтано развија у стабилан образац.

Екстремно прецизно изражавање код употребе једнакости међу људима потребно нам је зато што сасвим једнаких људи нема, а последице чак и најмањих неједнакости временом могу постати веома значајне.

---

[6] Edward Norton Lorenz (1917 - 2008), амерички математичар.

[7] Lorenz, Edward Norton (1972). "Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?"Address at the 139th Annual Meeting of the American Association for the Advancement of Science, Sheraton Park Hotel, Boston, Mass., December 29, 1972.

[8] Yoshiki Kuramoto, рођ. 1940, јапански физичар

[9] Kuramoto, Yoshiki (1975). H. Araki, ed. Lecture Notes in Physics, International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics 39. Springer-Verlag, New York. p. 420.

Сваки човек, па и било које поједино живо биће, има мноштво различитих особина. То мноштво представља једну биолошку јединку, основни биолошки систем. Међутим, док особине различитих појединаца могу бити исте, два појединца не могу имати све особине једнаким. Природа не воли толику једнакост!

Физичар Паули[10] је 1925. године у квантној механици открио *принцип искључења*, који каже да две идентичне материјалне честице, тзв. фермиони, не могу бити у истом квантном систему, односно да не могу заузети исто квантно стање. У случају електрона то значи да у истом атому нису могућа два електрона која имају једнака сва четири квантна броја (n, ℓ, m_ℓ и m_s). Последица тога је Мендељејева[11] таблица елемената. Чак и када би биле једнаког састава групе материјалних честица не могу у датом тренутку бити на истом месту и, према томе, морају ступати у различите интеракције са околином.

Полазећи од својих најмањих целина природа избегава једнакости. Она неће правити две идентичне пахуљице снега, иако ће свака имати тачно шест страна. Не постоје два идентична листа дрвета, мада они сви обављају фотосинтезу. Ма како нам била слична два човека, они никада нису потпуно једнаки.

Када се залажемо за једнакост људи ми се лажемо и то „натезање“ истине има своје последице. Доследно инсистирање на „једнакости“ води у науци о друштву у већ запажене појаве које се још увијек сматрају локалним девијацијама, а за које се тражи решење побољшањем демократије. Свесни овог проблема бежимо од изјаве „људи су једнаки“ у изјаву „људи су равноправни“.

Равноправност буквално значи једнакост у праву. То је једнакост свих чланова одређене заједнице пред прописаним правилима или законима те заједнице. Потреба за равноправношћу долази из жеље за слободом, праведношћу и једнакошћу сваког човека, храњена вером да је могуће друштво које сваком појединцу даје једнаке шансе за успех у животу, шта год да се сматра успехом.

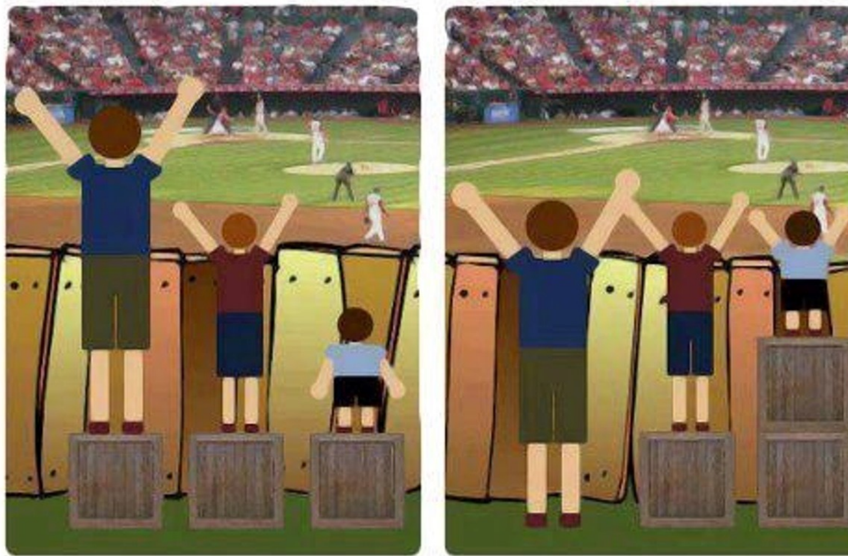
У теорији друштва нису непознате тешкоће успостављања равноправности и праведности заједно, као што демонстрира слика 2.3. На слици су лево и десно представљене три неједнаке особе. Лево су им равноправно подељене позиције навијача иза ограде, а десно су те позиције подељене праведно.

Демонстрирајући неслагање појмова равноправности и праведности наводно је неки професор у учионици поред табле, испред студената који су седели у својим клупама, поставио корпу у коју су они требали убацивати лоптице као у кош. Бољи успех имаће они који у једнаком броју покушаја са истом врстом лоптица у исти кош буду имали већи број погодака. Већ после првих покушаја постајало је јасно да они ближи корпи имају боље шансе. Ово није праведно! - протестовали су студенти из задњих клупа - јер ми не можемо тако лако погађати као они напред. Тако је, а тако је и у животу - одговорио је професор - јер чак и када постоји једнакост циљева и правила игре, то не значи једнакост ваших шанси!

Људи су неједнаки у својим потребама и жељама, па зато и у доживљају онога што називамо „фер-игром“. Када декларишемо њихову равноправност тада „гурамо

[10] Wolfgang Pauli, 1900 - 1958, аустријски физичар.

[11] Дмитриј Мендељејев, 1834 - 1907, руски хемичар.



Slika 2.3: Равноправност и праведност.

под тепих" њихове разлике које негде касније ескалирају. На крају нас то опет стижу последице претходно наведене немогућности потпуне једнакости људи.

Претпоставимо већи приоритет *праведности* уместо приоритету равноправности и једнакости у друштву. То је такође мисаони експеримент.

Замислимо изоловано друштво неједнаких особа у условима ограничених залиха хране и воде. Крупније особе или особе са већим, бржим метаболизмом требају више хране и воде него што то требају мање особе. Они су већи, бржи потрошачи залиха. Да би сви једнако дуго живели, пре него што умру од глади или жеђи, храна и вода се морају расподелити неједнако. Трајање живота ове популације ће бити краће, него када би то друштво жртвовало оне своје појединце који су највећи потрошачи, дајући им једнаке количине хране као и онима најмањим.

Наведени пример демонстрира губитак *ефикасности* због праведности, што је понекад неприхватљиво, чак и за највеће праведнике. Као када кажу да није у реду „заклати вола због киле меса". Прихватљива је ефикасност када војска има легалан начин да жртвује неколицину ради спаса већине. Насупрот колебању људи између избора праведности или ефикасности, за еволуцију, развој живог света на Земљи, приоритетнија је ефикасности од праведности или равноправности.

Слична неефикасност равноправности стоји и у случају поопштавања. Када се „равноправност" генерализује на људе, животиње, па и друга жива бића, у смислу да су она „равноправна" када полажу исто „право" на ресурсе око себе. Када се два грабежљивца осећају једнако јаким или гладним испред плена, онда их можемо сматрати „равноправним" у односу на лов који би могао уследити. Када је дато тло једнако погодно за раст две културе, онда те културе можемо сматрати

„равноправним“ у датој ситуацији.

Поопштење појма „праведност“ могло би ићи ка осећањима и решењима којим је субјекат био задовољан, затим ка добровољности, па у правцу спонтаности, истим редом, од свесних ка несвесним живим бићима. Таква „генералисана праведност“ опет би била у нескладу са ефикасношћу.

На пример, чули смо за изреку да и пут у пакао може бити поплочан добрим намерама. Други пример: када животиња следи своју жељу за храном она може упасти у клопку. Треће: врсте које су временом еволуирале ка сигурном и стабилном и стигле до (локалног) савршенства, могу се наћи у таквом стању стагнације да ће свака генетска промена за њих значити (привремено) назадовање, све док их околне врсте својим развојем толико не престигну, па им се може десити изумирање.

Дакле, праведност којој тежимо не смемо узимати превише за озбиљно, ако ни због чега другог, онда због будућности у коју ће нас та тежња одвести, а која нам се можда неће допасти. Следећа по важности негативна особина појма праведности је њена нестабилност, бар када је реч о тражењу водећих принципа друштва.

Наиме, праведност је променљива временом и местом, а у фиксним условима се осећање праведности може мењати од субјекта до субјекта. Рецимо, у некој држави канабис може бити нелегалан а затим бити легализован, док је у другој земљи сличан закон остајао непромењен. Саме жеље, односно добровољност живих бића, олако су променљиве временом, местом и од субјекта до субјекта.

Док је праведност аљкава, ефикасност је нехумана. То је сва суштина сталне промене друштвених система током историје. При томе се мењају разлози због којих је заједница неефикасна.

Друштвену организацију сачињавају појединци са осећајем колективитета који желе задовољити своје сопствене, себичне интересе. Чак и у борби за друштво једнаких у основи су лични интереси, као и схватање побуњеника да је компромис користан, да не треба за себе тражити више од онога што се може дати другом. У основи тог компромиса је ефикасност ради победе.

И у самом корену борбе за равноправност налази се ефикасност. Међутим, идеја равноправности је утопија, која се зато временом мора замењивати нечим другим. Шта год било то друго оно није равноправност и води[12] у хијерархију[13].

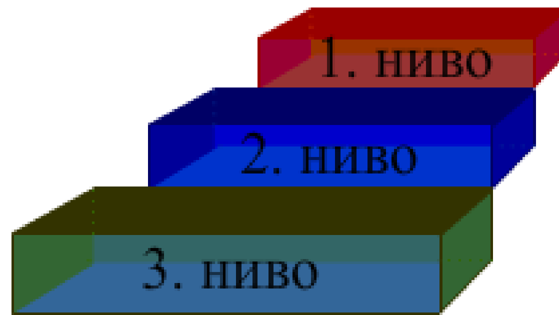
Хијерархија је организација или друштвени систем чији су чланови рангирани статусом или ауторитетом у нивоима равноправних (симболично на слици 2.4). У основи сваке неједнакости групе исте врсте су сличне жеље, односно потребе, које се могу линеарно поредати према степену моћи и доминације. То нам долази од живота у групама исте врсте, која је током еволуције кроз низ генерација успевала да налази храну, да надвлада непријатељско окружење и да се размножава. Отуда негација равне организације води у хијерархију.

Закључци су да ефикасност у демократији постоји у самом њеном настанку у идеји равноправности, затим да утопија равноправности, конфузност праведности и повремене потребе за ефикасношћу рађају прикривене хијерархије које су временом

[12]неједнакост + поредак = хијерархија

[13]Било би престрого свести егзистенцију хијерархије на Банахов став о непокретној тачки.

Slika 2.4: Хијерархија са три нивоа.



прихватљивије, јер је боље трпети лидере него хаос. Наравно, потреба за ауторитетом у демократији настаје већ због дефицита оног **h**, те вишка слобода $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$, али овде тај процес покушавамо разумети другим методама.

Хијерархијска организација је ефикаснија од равне. Зато што им је то лако и зато што хоће, у демократијама се брзо појављују пожељне и непожељне аутократије које јачају, стално се борећи за опстанак и доминацију. Видимо их као побољшања или девијације демократије или се она у то касније развијају.

Због својих утопија демократија не може бити статична. Она се мора развијати кроз објективне[14] процесе током низа година. Из почетне фазе еуфорије једнакости, сигурности и правде, преко нежељених хијерархија које им се „ували уј“, друштво неминовно долази до потребе и жеље за неком новом, али праведном и ефикасном аутократијом. Демократија прераста у хијерархију.

Чудно је да постоји један такав динамичан кружни ток друштва који се спонтано развија из фазе у фазу, да би на крају дошао опет до облика сличном (никад једнаком!) почетном, настављајући кружење испочетка. Међутим, не само друштво, већ и природа, па и математика познају такве циклусе.

На пример, у спорту у такмичењима тимова понекад виђамо да тим A изгуби од B, затим да B изгуби од тима C, а да затим C изгуби од A. Да је то математички немогуће никада се не би десило. Ипак, ево још једне потврде да то јесте могуће.

На слици 2.5 видимо тзв. магични квадрат, који има девет поља са различитим цифрама (1 - 9), чији су збирови у сваком ретку, свакој колони и обе дијагонале 15. Нека су у колонама представљени бодови тимова A, B, C у њиховим међусобним сусретима. Тако је први играч екипе A од првог играча екипе B изгубио резултатом $4 : 9$. Изгубио је и други играч са $3 : 5$ али је трећи победио са $8 : 1$. Ипак, тим A је изгубио од тима B бројем победника играча са $1 : 2$. Тако је број победа тимова $B : C = 1 : 2$, али $C : A = 1 : 2$.

Постоји, дакле, логичка могућност кружног развоја који нас на крају може довести опет до сличног почетка.

[14]Објективан значи несубјективан, изван моћи појединаца, па и друштва.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Slika 2.5: Магични квадрат 3×3.

2.3 Ауторитет

Ауторитет је моћ или право наређивања, одлучивања и наметања послушности. Ауторитет је и способност или критеријум за доношење одлука. Такође, ауторитет је особа или организација која има моћ контроле, посебно у области политике или администрације. Супротност ауторитету је немоћ или неспособност наређивања, управљања или одлучивања. Речи са супротним значењем од ауторитета су обезвлашћеност, затим равнодушност, равноправност, па и анархија.

Да бисмо још боље разумели ауторитет, прво размотримо ситуацију када имамо две или више особа, субјеката $X, Y, \dots$ и недељиви циљ C који они желе постићи. Тај циљ може бити челна позиција групе, победа у неком такмичењу, уникатни предмет, односно било шта што може припасти само једном од субјеката.

Када кажемо да су два или више лица $X, Y, \dots$ равноправни то значи да они немају критеријум поделе предмета C. Они се тада могу одлучити на *сукоб.* Важи и обрнуто - ако се два или више лица сукобљавају, то значи да су они у предмету C равноправни.

Према томе, сукоб настаје због одсуства другог начина одлучивања и пресуде. Та особина сукоба, односно конфликта, да представља врсту критеријума, односно способност сукоба да буде замена ауторитету одлучивања, универзална је за сва жива бића.

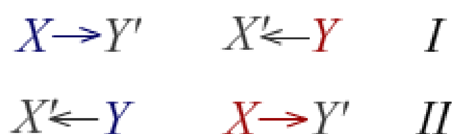
Ако би равноправне јединке у живом свету у сукобу могле бити идентично једнаке, стално тежећи свом циљу, тада би сукоб могао трајати и трајати, без исхода. Значај сукоба у одлучивању био би мањи. Међутим, не постоје идентично једнака жива бића и зато је сукоб толико уобичајена појава у еволуцији уопште.

По истом обрасцу у сукобе улазе и равноправне групе јединки. Политичке партије $X, Y, \dots$ могу имати једнако право на неки политички циљ C. При томе сами појединци, чланови партија или гласачи не морају бити равноправни (у било ком смислу). Међутим, сукоб групе је преносив на појединце, чланове група.

На пример, настанком модерне демократије појавиле су се *нације*. Национални осећаји су постојали и раније, али су они током последња два века постали значајни, појачани. Добијају важност због проглашене равноправности политичких интереса, односно равноправности партија које се боре за власт. Сукобљени циљеви партија су узрок цепање демоса „по шавовима“ и формирања националних табора.

Између неравноправних се такође дешава конфликт, али због погрешне процене, као што је скицирано на слици 2.6. На тој слици, лево опоненти X и Y (плави) нису на истом нивоу, припадају I и II лиги, редом. Први, X, прецењује опонента Y и види га као Y' (сиво) и почиње конфликт. Ако други узврати, након дилеме „бежати или борити се“, опонент Y потцењује опонента X и види га као X'. Тада други углавном губи. Као дивљач Y против ловца X.

Друга, слична ситуација је на истој слици 2.6 десно. Први опонент је у нижој лиги од опонента Y (црвено), кога потцењује и види га као Y'. Ако узврати, Y тада углавном добија. На пример, када очајник X нападне, Y изгуби.



Slika 2.6: Сукоб неравноправних X и Y.

Пример прве ситуације је напад државе САД на државу Ирак у лето 2003. године. Нападач намерно и прикривено прецењује опонента или потцењује себе да би оправдао неки зли разлог за напад (рецимо пљачку), али радећи тако да би конфликтом увећао свој значај и изашао са херојском победом. Знамо да је Америка тада победила Ирак, али да је Аустро-Угарска монархија 1914. слично напала Србију и изгубила.

Први тип напада може бити и унутардржавни терор. Независна Држава Хрватска је 1941. преценила значај Срба да би се одлучила на геноцид (трећину убити, трећину покатоличити, трећину протерати). Усташе су тада убиле око 1,4 милиона недужних Срба, Јевреја и Рома. Такво преувеличавање опасности од Јевреја радили су и нацисти. Лидери су мењали перцепцију својих грађана X, увећавајући опасност од националних мањина Y, градећи конфликт са Y'.

У случају НДХ нападнути Срби су били државотворан народ, са претераним осећајем своје моћи, па су они могли бити носиоци герилског отпора против нове државе. Јевреји до тада нису били државотворан народ и нису могли себе доживети равноправнима са моћним нацистима.

Приметимо да изрази „преценити себе“ и „потценити противника“ овде имају исто значење. Зато се грешка перцепције умањивањем може свести на први случај. Важи и обрнуто - када ловац постаје ловина. Наравно, оба конфликта се могу дешавати са свесним или несвесним погрешним проценама.

Ми смо већ видели да је идеја равноправности, као и идеја једнакости, лажна. У математици, као и у егзактним наукама, ту би био и њен крај, али ствари не стоје

тако и у политици. Људи воле лагати, као што воле књижевност, филм и уопште фикцију. Ми смо се издигли изнад других врста не само зато што разумемо алгебру, већ и зато што умемо лагати, зато што можемо истрајавати у нечему и онда када нам постаје јасно да су у питању полуистине. Полуистина је заправо неистина, која нам је управо зато и привлачна, јер садржи оба непомирљива света. Зато волимо слушати предвиђања пророка, обећања политичара или дедукцију адвоката.

Величањем равноправности обезвређује се ауторитет појединца и настаје потреба за неким вишим, надљудским ауторитетом, који је у савременим демократијама правни систем. Он је парадоксалан пре свега зато што долази из тежње да човек буде изнад свега, а опет се поставља у позицију изнад. Затим, јер је настао из вере у слободе и истовремено из уверења да нам природни закони нису довољни.

Правни систем је највиши ауторитет демократије. Он одржава утопију система и контролише сукобе који стално настају из равноправности. Зато што једнакост води у сукобе. Остају питања: зашто радије верујемо апстрактној институцији права уместо лидерима, да ли требамо толико права и када ћемо имати савршен правни систем, попут основа геометрије?

Када кажемо да је нешто цивилизовано то заправо значи да је неприродно, односно изван токова дугог низа генерација на чијем крају смо данас ми. Затим лако долазимо до закључка да су институције друштва, као и само демократско друштво, помало неприродне. Другачије речено, оне су помало неусклађене са нашим генетским наслеђем које много, много дуже траје од савремених проблема.

Жене које су остављале потомство, а чије особине су стизале до наших времена, радије су бирале доминантне мушкарце. Заправо, то би тек требало утврдити, али чини се логично да су оне мајке које би у временима несташица живеле у близини вођа племена и ресурса имале веће шансе да своја наслеђа пренесу до нас. Оне нису имале времена за вањски свет (изван круга породице) као њихови партнери. Отуда су наши лидери чешће мушкарци и то они који су ефикаснији. Ма шта ово „ефикаснији“ значило, из претходне анализе следи да су то они који су мање праведни[15]. Зато ми данас желећи правду не верујемо нашим лидерима!

Друго је питање зашто нам је тако важна правда, односно право? Одговор на ово питање је лакши од претходног. Зато што равноправност ствара сукобе које треба регулисати, каналисати или осуђивати. Инсистирајући на једнакости грађана демократске државе имају сталну потребу за решавањем сукоба. Временом оне постају претрпане правном науком, правним институцијама, правном бирократијом и оптерећене правним трошковима, са свеприсутним правницима, по управама, владама, скупштинама. Равноправности, темељ демократије, имају за последицу да су правници најчешћи учесници у власти и институцијама државе.

На треће питање одговор је да не постоји савршена правда. Међутим, демократија не може без тежње ка бољем законодавству, логичним законима без противречности и таквима који нису промашени или непримењиви. Параграфима који паметно, доследно и праведно покривају све сфере живота и све могуће врсте конфликата. Систему савршених правника и суђења, у смислу тачног и поштеног спровођења

[15]јер ефикасност не иде увек са праведношћу

правних аката, без иједног случаја корупције, самовоље или нестручности. Како би таква држава изгледала, ако би била могућа?

Пре свега, то би било безконфликтно друштво. Већ због тога оно би било статично и досадно. Држава би имала проблем пригушене или потпуно заустављене конкуренције, који би узроковао тешкоће са мотивацијом и економијом. Када би једном направили безконфликтно друштво многи би тада схватили да га заправо не желе. Сукоб је окосница привлачности уметности, спорта, живота. Замислите информативне емисије без ударних вести о конфликтима. У тако савршеној држави, људи би била највећи проблем[16]. Наши нестабилни осећаји правичности и реда били би веома нецивилизовани.

Комунизам је био убрзани покушај стварања једног таквог „идеалног“ друштва, али је као што знамо, у судару са ефикасношћу *капитализма* изгубио трку. Капитализам је спој равноправности и економске ефикасности (у покушају). Екстремни облик тога је либерални капитализам. Зато што је то релативно нов друштвени систем, још увек нејасан и недовршен, занимљиво га је објашњавати са становишта наших поставки, између осталог и ради провера закључака.

Равноправност која се нуди народу на дну хијерархија демократије стални је узрок сукоба, надметања и конкуренције. Нарочито ово последње, такмичење у областима економије, али и сукоби уопште који су основа осећања слободе, главни су узроци успеха и привлачности капитализма. Комунизми који нису економски успели, а који су спутавали слободу сукоба подузетника, рецимо одузимањем или умањивањем приватног власништва, пример су који потврђује ове наводе.

Успешне капиталистичке државе подржавају сукобе на тржишту, јер монополи[17] умањују њихову економску ефикасност. За то постоје и егзактни разлози. Наиме, у математичкој теорији игара лако се доказује да дуополи[18] остварују не само већи тзв. потрошачки вишак од монопола, већ и укупни вишак[19]. Другим речима, држава мање профитира од монопола него од слободне конкуренције.

Капитализам, са принципом равноправности, мора дозвољавати борбе разних хијерархија за доминацију, а због ефикасности хијерархија наспрам равноправних, демократија постаје надвладана. Онај део капитализма који је економска ефикасност, у тој борби за моћ фаворизује фирме, акционарска друштва, банке, да постану ти „споредни моћници“ државе. То је разлог због којег данас *корпорације* најуспешније владају Америком.

Корпорације теже да контролишу америчку администрацију, затим њихову војску, друге демократске државе, НАТО, а затим и недемократске државе. То смо већ помињали. Империји која побеђује није довољна само јака војска, већ јој је потребна и добра утопија. Зато се походи освајања називају ослобађања, увођење демократије, просперитет, а ретко борба за профит или доминацију. У ароганцији они не брину што би их потчињени могли препознавати као грабежљивце или што раслојавање

[16] Трајањем, јачала би **h** а слабила **i**.

[17] Монопол је ексклузивно право контроле снабдевања тржишта робама или услугама.

[18] Дуополи су две фирме које доминирају снабдевањем тржишта, робама или услугама.

[19] Cournot competition: `https://en.wikipedia.org/wiki/Cournot_competition`

на малобројне који поседују све више постаје објективно, незауставливо вољом или жељом појединаца.

Корпорације веома успешно руше недемократске системе, али не зато да би народима тамо било боље, већ зато што се у условима либералног капитализма осећају моћно као прави предатори на свом терену. Оне праве ратове у којима профитирају, јер им америчка доминација обезбеђује некажњену пљачку „нецивилизованих“ и омогућава војни монопол на светском тржишту оружја. Споредни ефекат економске ефикасности корпорација је гурање капитализма у нехуманост.

Тако се идеја равноправности удружена са економским просперитетом постепено пред нашим очима развија у неравноправност. Капитализам лагано клизи и постаје зли систем који гази све испред себе ради профита, зарад све мање групе све више себичних и на крају омражених људи.

Када се дочепају моћи, такви појединци више и не желе правни систем какав је замишљан на почетку, већ теже личној владавини над законима, уз истовремено залагање за владавину закона над свим осталим светом. А моћ им дозвољава управо да манипулишу правним системима. Они лобирањем и корумпирањем судства и помало спашавајући свет[20] од страшне диктатуре права заправо одлажу крах либералног капитализма.

Такође је парадоксално, али чини се као да се друштво прелазећи на демократију одриче слободе. Из Д-К ефекта (пример 2.1.1) видимо да тада вредности компоненти $\mathbf{h}$ падају, што следи из пада компоненти интелигенције групе и дуализма. Зато очекујемо да опада и слобода $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$, нарочито када се ово дешава истом друштву са приближно непромењеном интелигенцијом појединаца.

Пример 2.3.1. *Шта се догађа са хијерархијом при преласку на демократију?*

Решење. Демократија наводно фаворизује слободе путем равноправности. Историја нас учи да су тежње народа за демократијом биле облици тежњи за слободом. Са друге стране, овде видимо да демократија има мањи интензитет $\mathbf{h}$ од неке претходне хијерархије, те да она има ниже ℓ.

Зато што је демократија врста либерализма чини нам се да она увећава ℓ, а због Д-К ефекта умањује $\mathbf{h}$, односно умањује ℓ. У условима када памет појединца $\mathbf{i}$ остаје приближно иста чини се парадоксалном формула $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$?

Али, у демократији јача правни систем! Када су сви људи равноправни настаје инфлација и пад њихове вредности, односно настаје потреба за нељудским ауторитетом. Поготово зато што једнакост генерише сукобе, а сукоби су често непријатни, правне мере наилазе на одобравања, стежући друштво. □

Дакле, правни систем је нова снага хијерархије ($\mathbf{h}$) у демократији. Охрабрујемо га и „сазнањем“ да цивилизација може и треба да поправља природу, те да нам природни закони нису довољни. Међутим, из дуализма интелигенције и хијерархије следи да правни систем мора почети показивати и знакове сопственог живота. Ево како се то може приметити.

[20] ометају претварање нашег $\mathbf{i}$ у наш $\mathbf{h}$

Могуће је имати скупштинску већину и изгласати неки закон којим ће у примени бити незадовољна већина грађана, па и они који су тај закон изгласали. Приликом наплате казне због брзе вожње гунђаће и онај посланик који би можда одобрио закон који је управо прекршио. Наводно би закон о највише једном детету у Кини засметао и члановима партије који су га одобравали када би почео да се односи на њих лично. То су први знаци осамостаљивања правног система[21], у правцу понашања организације као посебног бића.

Други знаци оживљавања правних система (у демократијама) долазе из дубље природе демократије. подсетимо се да: принцип равноправности генерише потребу за надљудским ауторитетом, апстрактним правним ауторитетом. Када је право изнад сваког појединца, тада слаби принцип хуманости (да је човек изнад свега), што је такође темељ савремене демократије. Међутим, право надвладава ову противуречност и побеђује.

Треће индиције долазе такође из природе демократије: она је медиократија, али у смислу површности коју памет не може надвладати. Зато што је демократија диктатура оних (мало испод) просечних, којима је потребан мало већи $\mathbf{h}$, имамо стални притисак за помало превише закона (за просечног, а поготово за надпросечног), а опет их добијамо све више. О томе говори и следећи пример.

Пример 2.3.2. *Објаснити раст броја закона формулом* $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$.

Решење. Када се донесе нови закон (указ, регулатива, одредба), тада наступа период адаптације корисника. Адаптација (пример 1.5.3) повећава слободу (ℓ), због које настаје празнина за додавање ауторитета ($\mathbf{h}$), при константном ($\mathbf{i}$).

Празнина због вишка слободе теже пада мање интелигентнима, чије су жалбе на „мањак реда“ гласније. Међутим, вишак могућности ℓ осећају и просечни, а демократија је владавина просечности, па страх од слободе постаје брига многих, из које се рађа потреба за новим регулативама. Тада је кружни процес озакоњивања поново на доношењу новог закона након којег креће нова адаптација. □

У овој расправи не дискутујем по линији добар-лош, јер бих због доследности и то морао гледати формално када би она изгубила очекивани ефекат. „Добро“ би морало бити оно што је „опште прихватљиво“, а такво би могло бити виђено само као „опште прихваћено“. Тада су манипулације институцијама права од стране моћника, ако су широко распрострањене, ваљда „добре“?

Када би манипулисање правом могло бити опште прихватљиво „добро“? Када приметимо да је право „зло“, односно ако приметимо да нас јачање правне државе води у друштвени систем који сада не желимо (али би еволуцијом људи можда постао прихватљив). То је веома уређен систем, са правно регулисаним сваким могућим обликом сукоба, у којем би се тешко могле „прошверцовати“ оне праве напетости и нелагоде које нам доноси конкуренција и борба. Ту би се расправа

[21] Овде је свеједно рећи „држава права“ (нем. Rechtsstaat) или „владавина права“ (енг. rule of law), као и „правни систем“.

враћала на онај део на претходној страници где је речено да манипулацијом (лобирањем и корупцијом) правног система чине и помало добро свету, успоравајући његов пад у окове законодавства.

Обрнуто, веома дугорочно гледајући, исте манипулације институцијама права од стране моћника могу се посматрати и као „лоше“. Водећи процеси еволуције теку у смеру $\mathbf{i} \to \mathbf{h}$, јединке организују колективе, безначајне ћелије постају ткива и органи моћног организма, па је ометање правног система (стуба хијерархије нашег друштва) успоравање тог природног процеса. У крајњем, људска цивилизација са већ значајним $\mathbf{i}$ појединаца и за сада нејаким $\mathbf{h}$ има две могућности. Одржати или повећати $\mathbf{i}$ повећавајући разноврсност наших перцепција и нашег окружења, као што се догађа данас ширењем демократских слобода и технолошких могућности, што значи одржање или повећање ℓ. Или пад $\mathbf{i}$ због пребрзог раста $\mathbf{h}$. У случају овог другог, са становишта касније настале суперхијерархије глупих људи, ометање еволуције „правде“ данашњих моћника биће оцењено са „лоше“.

Зато што је право несавладива[22] сила, која полако осваја друштво не штедећи нити једну другу хијерархију, можемо пратити напредак те силе, према количини преосталих мање јаких хијерархија, међу којима су религија и породица. Приметите да у деловима текста избегавам формулу $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$, дајући јој тако на значају.

Религија је израз људске потребе за ауторитетом. Независно од вере у Бога деца воле добронамеран ауторитет, једнако као што имају урођено поверење у одрасле, све док се такво не изјалови. Слични осећаји у промењљивом облику нас држе и даље током целог живота. То је једна од „ситница“ која се у демократији лако превиђа, али од које живе верске институције.

Ми тежимо друштву једнакости и обрнуто - поштујемо праведне ауторитете. Популарне религије управо тако истичу равноправност људи пред Богом и Његову праведност. Велике религије су успешне зато што хвале равноправност и фер-однос међу људима, али и етичност и духовност и уопште све позитивне врлине које су дубоко наследне, али са друге стране не беже нити од хијерархијске организације свог унутрашњег уређења, нити од ефикасности.

Са друге стране, због декламоване равноправности унутар самих религија могу тињати антагонизми, који остају под контролом ауторитета поглавара и институције, до евентуалног препознавања равноправности самих институција која може изродити вањске сукобе, а који се затим лако шире унутра. То је механизам сукоба за које знамо да су се догађали током дуге историје религија.

Из претходних разматрања следи да се и религијске институције боре за доминацију са другим ауторитетима, укључујући и државне. Њима су већи противници ефикасне хијерархије него сама демократија, већи су им противници моћне америчке корпорације него локалне самоуправе. Зато су тамо где владају корпорације религије у сенци, као што је то уосталом и сам „равноправни“ народ. Наравно, највећи противник религије је правни систем, иако многи тога још увек нису свесни.

Тако је поменута моћ католичанства у средњем веку расла на пропагирању хришћанске равноправности, а са друге стране на одсуству јаке конкуренције. Тада

[22] можда чак и ако смо смо свесни те моћи и узрока

није било фаворизовања економске ефикасности, већ су приоритети били поштење, праведност и духовност који су ескалирали до Инквизиције и неморалности и изопачености код Папе Борџије[23] у Шпанији. Како је спас од такве девијације демократија дошао јачањем европских монархија, то значи да је религија слабија чак и од монарха. Утолико је необичан херојски, али опет узалудан, данашњи отпор ислама против правних система.

Тек трећи по реду велики противник религија су науке. Можда звучи чудно, али друштвене науке су у тој категорији сада испред природних. Бог је неко кога чешће тражимо у социјалној и психолошкој сфери, док егзактне науке остају по страни. Међутим, сматрам да друштвене теме измичу егзактном не зато што прецизније истраживање друшвених односа није могуће, већ зато што су друштвене истине непријатне и непожељне. Медиокритети воле полуистине и политизацију, а са друге стране озбиљни, генијални трагачи за истином клоне се суда медиокритета и не желе да им неко каже „то је политизација“ или „теорија завере“ за неки доказ сличан доказу Питагорине теореме. Зато што су лажи у друштвеним односима „слатке“ држи се веровање да тамо и не постоје истине, да је свет природних наука нешто веома далеко од друштвених појава. Зато се верује да је Бог неко ко се не меша у природне законе, па се то преноси и на вернике.

Људи су се одвојили од примата оним деловима своје интелигенције који су им омогућили да боље користе истину, али и да лажу. Развој вештина лагања и манипулисања чинио их је успешнијим у кориштењу могућности окружења, али дијалектички, слаткоћа тих истих лажи сада зауставља развој **i** у корист **h**.

Без обзира на све овакве критике, које ће временом само расти, савремена демократија ће се и даље сматрати најбољим и најуспешнијим системом власти до данас. Лидери су бирани гласањем народа и они заузврат штите интересе народа боље од било каквих представника у прошлости, сматраће историчари још дуго. Она промовише једнакост људи пред законом и шире, што им даје велики осећај слободе и могућности. Промовише промене без употребе насиља. Сматра се да демократија има своју позитивну тежину у стабилној, посвећеној и одговорној власти, па и у *администрацији*.

Међутим, управо ту испливавају још неке тешкоће демократије. У неспособности администрације да сврсисходно управља временом и јавним фондовима. Након сваких избора изгледа да је народ изабрао погрешне, некомпетентне и неодговорне лидере. У демократији доминирају просечни над способним, количина често побеђује квалитет, не само на тржишту.

У аутократијама је власт централизована у једном лидеру и ограничена на мањи број потчињених. Тако је ограничена и корупција. Напротив, у демократији у којој се владајуће тело разводњава на широку, масовну администрацију, управљање постаје скупо и споро, са неискорењивим осећањем аљкавости, што охрабрује варање и крађу. То опет ствара потребу за додатном контролом, која опет тражи даљњи пораст тела администрације, тј. бирократије. Људи воле добронамерне ауторитете, па толеришу богатство једног краља, али не и покушаје богаћења многих, нарочито

[23] Rodrigo Lanzol y de Borja (1431 - 1503) био је папа од 1492. до 1503. године.

не и оних које су бирали зато да би им представљали власт. Иритира лоповлук „свакога у администрацији чим добије прилику“.

Корупција се показује као неминовност демократије, коју капитализам делимично заташкава легализовањем лобирања. Лобирање је сваки покушај утицаја на гласачко тело или на одлуке власти од стране појединаца или заинтересованих група. Тиме се повећава утицај на изборе или на одлуке власти, што отвара могућности манипулације администрацијом система и то је управо оно што даје додатну снагу корпорацијама у Америци данас. Корпорације зато као искусни ловци у хајци на ситну дивљач (кришом) подстичу хаос или бар социјалистичке покрете у свету, знајући да ће им то олакшати улов.

Администрација живи у симбиози са правним системом. Њих две су две стране истог тела, које полако заједничким снагама преузима све друге хијерархије нашег друштва, па према томе има и знаке своје аутономије. Подмитљивост и застрањивање бирократије веома подсећа на сличне особине лица које се однародило и почело да води свој живот, злоупотребљавајући положај. То су исте црте које налазимо понекад и у правном систему уопште.

Са свом својом бирократијом „у служби грађана“, администрација заправо не штити обичног човека. Она је преспора. Равноправност подстиче антагонизме и себичност појединаца, стварајући осећај да „нико не брине ни за кога“. Чак и нижи чиновници пркосе својим надређеним, иако су обојица корумпирани или неморални, а они одозго настоје да и даље заваравају јавност да би задржали власт.

До свега овога долазимо из основног колико нетачног још више и привлачног принципа демократије: равноправности. Наметнути принцип равноправности правдамо потребама индивидуалности и личне слободе. Са друге стране, исти нас присиљава да лошије одлуке маса редовно прогласимо за боље, подстичући нашу глупавост и жељу да се препустимо снажнијој хијерархији. Тако заправо долазимо до супротног, до колективизма и личне неслободе. На нивоу држава, сличан механизам везује руке земљама у транзицији и омогућава већ успостављеним хијерархијама (корпорацијама) да лакше владају. Зато они који имају моћ, чак и када уоче неку слабост демократије, више не желе да је поправе.

2.4 Суживот

Суживот је заједнички живот у исто време или на истом месту. Суживот или *коегзистенција* је начин живота у миру са другима упркос битним неслагањима. Међутим, из тумачења формуле $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$ сада знамо да чак и у основи тако дефинисаног суживота лежи потреба за хијерархијом, чије ћемо механизме овде покушати разоткрити.

Демократија подстиче егоизам, јер равноправност генерише сукобе, а сукобљавање које стално извире из проглашене једнакости одваја људе и чини их себичнима. Са друге стране, претња мешања правне државе у њихове ситне конфликте замара људе и повећава њихову отуђеност. Исто се дешава и са групама које прогласимо једнакима, равноправнима, па и сличнима. Да се индивидуализам и нетрпељивост

не би преокренули у насиље, демократија мора стално радити на промоцији заједничког живота, толеранције и опет равноправности. Отуда заједнице које немају новца или га не желе трошити за пропагирање мира лако „заглаве“ у насиљу. Сиромашне демократске земље чешће имају грађанске ратове од богатијих.

Принцип једнакости се мора одржавати лицемерно и вештачки зато што је утопијски. Због доследности, „равноправност“ се може ширити на све и свашта, а демократске расправе морамо водити површно и политикантски. Присиљени смо истине у друштвеним наукама сматрати привидним и без могућности да буду егзактне. То смо већ приметили на претходним странама, а овде настављамо подвлачећи да се тако разни облици суживота поопштавају, чиме се они заправо обезвређују.

Породица је последица еволуције. У прошлости су постојала друштава која нису признавала ауторитет породице, али која нису биолошки опстала, за разлику од оних друштава која имамо данас и која су преживела. Као што ће само неких од данашњих бити и сутра.

То је тумачење породице којем се супротставља све популарније схватање према којем је породица произвољна заједница два лица (небитног пола) или дефиниција брака који је ствар дневне политике, људских права и законодаваца. Религија се мудро држи традиције, али демократија иде напред ка људима „отвореног ума“.

Како се догађа да се прво, традиционално, религиозно или биолошко стање породице повлачи испред другог, напредног, помодарског? Процес генерализације дефиниције породице је карактеристичан за демократију. У првој анализи су важне правна могућност и неразликовање. У другој - борба за доминацију.

Први разлог је проблематичност идеје „равноправности“ удружене са јаком вером у право у савременом друштву. Демократија правну науку често узима здраво за готово, као нешто блиско природним законима, а понекад и изнад њих. Ако у закону стоји да су мушкарци и жене равноправни, онда их не разликујемо, па макар говорили о браку. Тада не морате тражити дефиницију неког новог „брака II“, равноправног старој, већ можете генерализовати стару која обухвата нову. Породица се банализује на „заједницу двоје људи“, небитно којег пола.

Други разлог је потреба дате мањине да се сакрије у већини. Сукоби који настају због декларисане једнакости стварају антагонизме у друштву. Дијалектички, ти антагонизми највише угрожавају појединце и заједнице који су другачији. Управо зато што су у мањини, они који су различити и угрожени имају интерес да се маскирају и изједначе са просечнима, а ако имају и моћ они тада могу лобирати, режирати и манипулисати демократију и на крају искористити законске могућности које им дозвољава „развлачење“ појма једнакост.

Зато што су угрожени као различити, гејеви не желе да буду издвајани из масе, а зато што имају новца они потежу за могућностима које на крају могу резултирати победом мањине над већином. Тежње угрожених мањина да се сакрију у већини су типичне за демократију. То је изједначавање слабих и јаких пред законом, процес који је ехо равноправности, а који нам открива још једну важну особину демократије - она не трпи различитости, за разлику од аутократије која их тешко спаја.

Када су основе различитих теорија добро постављене, као у математици, онда

сви докази складно теку ка истим истинама. Свака појединa истина тада може само откривати своја различита лица. На пример, алгебра методама координата потврђује познате теореме из геометрије, а теорија вероватноће тврђења из алгебре. Нема контрадикција. То је критеријум успеха који желимо да препознамо и овде.

Заштита слабијих је и легална обавеза друштва. Законодавац је присиљен да прописује заштиту жена у браку од насилног мужа, односно дете од родитеља. Међутим, када имамо више ауторитета правне државе, тада имамо мање ауторитета породице. Па је питање - у чему је проблем? Зашто би ово обезвређивање породице била карактеристика демократије?

Зато што инсистирање на равноправности чланова породице генерише више сукоба, из којих произилазе нове потребе за примену закона. Вишак употребе закона долази опет из веће равноправности. Исти процес иде и даље, када се у страху од сукоба партнери све теже одлучују на брак, а тада демократско друштво почиње да има проблеме са својом биолошком репродукцијом.

Знам да мање-више многи примећују да је демократија (делимично) јалова, у односу (рецимо) на системе ислама, али нисам сигуран да су механизми те неплодности довољно видљиви, па ћу на њих кратко подсетити у наставку.

Еманципација је ослобађање од зависног положаја и стицање слободе појединца, друштвене групе или институције. Еманципација је стицање једнаких права са неким или нечим. Приметићемо да је то један типично демократски процес који ћемо размотрити фокусирајући се на савремену еманципацију жена, али тако да се у позадини види универзалност претходних закључака.

Када би еманципација била борба за побољшање живота жена, онда би њен важан циљ било и признавање рада мајчинства или бар врста социјалне, здравствене, пензионе помоћи мајкама са децом. Међутим, тада би држава славила различитости, што није својствено демократијама. Напротив, еманципација жена је изједначавање њихових права и обавеза са мушкарцима, карактеристично демократски. Занимљиво је да у том (видели смо спонтаном односно објективном) процесу учесници верују да им је најважније да имају „борбеност“ да би постигли „победу“.

Феминисткиње, жене борци за женска права, до средине 20. века првенствено су тражиле једнака плаћања радног учинка и давање права гласа (тзв. суфражеткиње) женама у европским земљама, које то право гласа углавном нису имале. Затим се њихова борба усмерила ка родној равноправности. Остварењем главних циљева, од 1990. године до данас, феминизам се залаже за квир[24] теорију (да идентитет није фиксан, већ је променљив односно флуидан), за постмодернизам (који прихвата глобализацију света, децентрализацију и плурализам), екофеминизам (партнерство и сарадњу жена, мушкараца и природе) или трансфеминизам (обједињавање са покретом за права трансродних[25] особа).

Приметимо да сви правци феминистичке борбе некад и данас иду ка једнакости у праву жена и мушкараца, њих са глобалним светом, глобалног света са природом. Она је у суштини „борба“ за легализовање неразликовања и утапање свих у једну

[24]Квир (енг. Queer - чудан, настран) у почетку је био погрдан назив за хомосексуалце.
[25]Трансродан значи и мушкарац и жена, обоје или ниједно.

већу просечност. То је наводна борба активиста, а заправо је маскирани спонтани, природан и често нужан ток демократије.

Поред свих тих позитивних аспеката, дијалектички, демократска еманципација жена мора имати и своје мане. То је, на пример, презапосленост савремене жене, која поред своје нове мушке улоге у јавном свету још увек има своје биолошке функције. Неке од тих функција су везане за њено потомство и породицу, које сада трпе. Као у претходном наслову, сада на трећи начин долазимо до истог закључка, до слабљења значаја породице. Карактеристика успешних демократија је пад наталитета.

Још један пример је женски урођени алтруизам[26] који је окренут ка деци и породици, за разлику од мало слабијег мушког који је окренут ка вањском свету. Он је такође разлог да се успешна пословна жена, која због вањских обавеза не стиже да има породицу, осећа неиспуњено и помало фрустрирано. Све то нас води на закључак да је појава демократије једна велика раскрсница, прекретница у еволуцији нашег друштва. Слична дегенерација дешава се и са истином, њеним маскирањем ради одржавања утопије.

Реч *дегенерација* буквално значи пропадање или кварење. Статично формално употребићемо је за опадање вредности дедукције због лоших претпоставки. Такође, при опису дуготрајних развојних процеса, она ће нам значити лошу еволуцију, али и развој у неку нову вредност.

У математици импликација „ако је A онда је B“, односно $A \Rightarrow B$, може бити нетачна само ако је претпоставка A тачна, а последица B нетачна. У свим осталим случајевима импликација је тачна. Отуда са лошом претпоставком имамо увек тачну импликацију, без обзира на последицу. То практично значи да математика дозвољава трабуњање које може изгледати сасвим добро, али само ако крећете од неистине.

Демократски принцип равноправности је управо таква претпоставка иза које може стајати савршено тачна дедукција која води ка безвредним резултатима. Зато имају смисла дебате и такмичења на тему „Демократија и људска права“ са датом тезом коју треба прихватити или одбацити, при чему је учесницима свеједно која од те две улоге ће им бити додељена. Овакво апсурдно надметање код учесника временом развија осећај да нема егзактног у друштвеном. Дајте ми било какву тезу, доказаћу је! Опет ми је дајте, оспорићу је! - могао би се хвалити шампион таквих дебата. То је дегенерација схватања истине.

Из истог разлога је у демократском правном систему могуће имати тако доброг адвоката који на суђењу свом брањенику може доказати шта год хоће, да јесте или да није крив, без обзира на то да ли дотични стварно јесте или није крив. Рецимо, ако се доследно држи равноправности. То је дегенерација принципа права.

Инсистирање на примени нетачног основног принципа демократије - да грађани могу бити равноправни у нечему (било чему) - проузрокује и оне буквалне, динамичке дегенерације друштва. Можда је то случај са недавним открићем да се просечна интелигенција људи у западним земљама (Британија, Данска, Аустралија) смањила

[26] Алтруизам је несебичност и брига за друге.

за бар 10 IQ поена од 1900. године до данас[27].

Професор психологије на Универзитету Амстердам, Јан те Нијенхијус тај ефекат објашњава чињеницом да образованији и цивилизованији људи немају времена за децу. Он указује да интелигентније жене имају мање деце него оне које су мање паметне. Под притиском демократије на западу (паметне) жене су образованије и еманципованије, оне прелазе на некада „мушке" послове због којих често занемарују породицу и имају мање деце.

Друго тумачење пада просечног IQ западног становништва неки теоретичари виде у имиграцији. Наводно је просечан IQ у Пакистану од 83 до 91, а у Западној Африци или Индији од 74 до 83, а Британија је из тих земаља имала највећу имиграцију од 1970. до данас. Међутим, тако опет долазимо до демократије као узрока. Због равноправности људи на друштвеном дну, због сукоба које покрећу такве једнакости, демократија израста у привлачну и успешну. Али како је она зато и биолошки јалова, то су имиграције „варвара" њена неминовност. Приметимо да је овај процес „трошења" демократије мало другачији од оног претходно описаног, када демократију преузимају њене јаке хијерархије.

Демократија (ниске вредности $\mathbf{h}$) се можда и појавила када је наша интелигенција $\mathbf{i}$ била на врхунцу, када је због одсуства разноврсности коју имамо данас након технолошког развоја то могло бити довољно за количину могућности ℓ. Међутим, развој снажног правног система (повећање $\mathbf{h}$) могућ је даље само истим таквим развојем других опција које би повећавале наше локалне слободе, држећи равнотежу са интелигенцијом према формули $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$. Са становишта еволуције то је свеједно, она само тражи повећање ℓ.

[27]Слично налазима да проценат наследних болести у демократијама расте или да жене све теже рађају без медицинских помагала.

Glava 3

Формализам

Назив овог поглавља могао је бити Неживи свет, Математика еволуције или Физика информације. Свеједно, читалац у 2016. години нити у једном од сличних назива не би могао лако разумети о чему се ради, јер овде нема много тада познатих ствари. Ипак, ту су једноставне математичке методе које су ми биле основа за претходна разматрања, али су остајале изван контекста и онда опет добиле на значају.

Увек се изненадим када се осврнем уназад и приметим колико шкарта ми остаје иза неког наизглед тривијалног резултата, али се често изненадим и када видим колико у том шкарту има поново занимљивих идеја. Тако сам, на пример, крајем деведесетих година прошлог века, завршио један текст, о информацији у физици, који заједно са рецензијама[1] још увек чувам, а у којем се доказује да из претпоставке одржања (количине) информације аналогне Шененовој, у затвореном квантном систему, следе основне формуле квантне механике (Шредингерова, Клајн-Гордонова, Диракова). Текст није никада објављиван, све до 2014. године када сам га неспретно скраћивао и превео на енглески[2], када је већ застарио. Део тог текста је овде, али са сасвим другим нагласком, јер сада Шенонову информацију сматрам специјалним случајем опште формуле $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$.

Способност *одлучивања*, на почетку приписану само живом свету, покушати ћемо проширити до краја, до самих елементарних честица физике. Међутим, тада ју је тешко посматрати онако како смо навикли. Процес „одлучивања“ постаће слепо одабирање, оно што се у теорији вероватноће назива реализацијом случајних догађаја. Међутим, случајни догађај у математици често није оно што ми обично мислимо да је.

Када по први пут посматрамо низ децимала броја „пи“ $3,14159265359\ldots$ он изгледа и понаша се тачно као низ случајних бројева. Тај низ ће проћи „тест случајности“ теорије вероватноће, који тешко може проћи човек који би покушао симулирати случајности изговарајући цифре насумице. Када следећи пут видимо исте децимале броја „пи“, биће нам јасно да то нису случајни бројеви који излазе

[1] Рецензенти: Р. Баврлић и А. Глушац, професори физике у Гимназији Бања Лука.
[2] Conservation law: `www.academia.edu/8004844/`

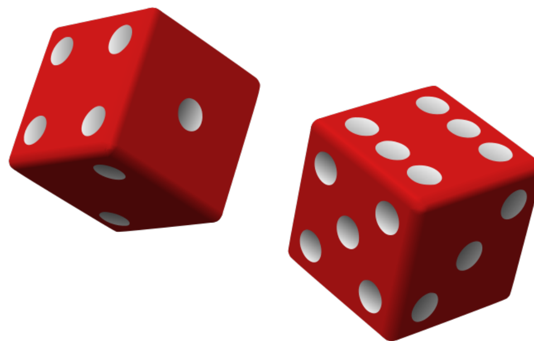
из неког лото бубња, већ да су то тачно одређене цифре у јединственом редоследу. Зато кажемо да се математика бави само псеудо (кобојаги) случајностима.

Ми наравно и даље можемо говорити о „интелигенцији“ или „разуму“ електрона, ако подразумевамо да је то „атом“ интелекта из света живих бића, који тек у великом мноштву (преласком квантитета у квалитет) добија нови смисао. Можете рећи да честице физике имају живот једнако као што можете рећи да су жива бића само механицистички, хемијски или слични сложени склопови апсолутно мртве ствари. Формално је свеједно, али да не би било забуне, користићемо друге ознаке.

Слободу ℓ означаваћемо (и са) словом s, које ће и даље представљати неки скалар. Интелигенцију или разум можемо означавати и вектором $\mathbf{r}$, којем ћемо давати различит смисао зависно од области примене. Доследно алфабетски, онај вектор хијерархије можемо означавати са $\mathbf{p}$, па једначина $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$ у наставку текста постаје $s = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$. Могуће је и другачије означавање.

3.1 Вероватноћа

Слободно речено, вероватноћа неког догађаја је број који је утолико већи што су веће шансе да се у датим околностима догађај деси. У физици (термодинамици) тај број је позитиван реалан број, у матматици тај број је реалан број од 0 до 1.



Slika 3.1: Две коцке са по 1-6 тачака.

Када бацимо једну фер-коцку (в. слику 3.1), вероватноће падања било које од њених шест страна су приближно једнаке $\frac{1}{6}$. То је број који добијамо тако што знамо да је једна од шест могућности (нпр. „тројка“) и да би по неком реду свака шеста могла бити баш та могућност. То је резултат провераван многобројним експериментима. На пример, у некој серији од 100 бацања коцке пашће само 11 тројки, а очекујемо њих од 16 до 17 (шестина од сто), али понављајући више серија по 100 бацања приметићемо да се број „тројки“ заиста групише око очекиваног.

Када бацимо две коцке вероватноћа да ће на првој и другој редом пасти два унапред дата (различита) броја износи $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, у случају да су падања једне коцке независна од оне друге. Шта ако падну исти бројеви? Шта ако су коцке различите боје и тачно се зна која је „прва“ а која „друга“? Већ из ових наизглед крајње

једноставних примера увиђамо да нам је потребна јасноћа у раду са случајностима. Ми хоћемо прецизношћу да овладамо небулозама.

Погледајмо сада неколико примера који ће нас повезати са претходним разматрањима, стављајући акценат на неживи свет.

Рецимо да имамо неки догађај који се дешава са вероватноћом $p \in (0,1)$ а који можемо понављати $r = 1,2,3,\dots$ пута. Када имамо n-торку сличних догађаја са вероватноћама редом компонентама вектора $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, а које можемо понављати истим редом $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ пута, тада је укупни број реализација ових догађаја приближно

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = s. \tag{3.1}$$

То је скаларни производ датих вектора чији резултат је скалар s.

Како је

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{p}||\mathbf{r}| \cos\angle(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \quad -1 \le \cos\angle(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \le 1, \tag{3.2}$$

то је

$$-pr \le s \le pr, \tag{3.3}$$

где смо са

$$p = |\mathbf{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2}, \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2} \tag{3.4}$$

означили модуле датих вектора.

Пример 3.1.1. *Бацамо коцку 60 пута и бројимо колико је пута пала „шестица“, затим бацимо новчић 30 пута и бројимо колико је пута пало „писмо“.*

Решење. Прво, за коцку имамо $p_1 = \frac{1}{6}$ и $r_1 = 60$, па је број „шестица“ приближно $s_1 = p_1 r_1 = 10$. Затим, за новчић је $p_2 = \frac{1}{2}$ и $r_2 = 30$, па је број „писама“ приближно $s_2 = p_2 r_2 = 15$. Укупно је шестица и писама око $s = s_1 + s_2 = 25$. Због

$$pr = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{60^2 + 30^2} = 25\sqrt{2} \approx 35,4$$

је тачна и неједнакост (3.3). □

Пример 3.1.2. *Студент је тачно одговорио на две трећине питања са првог теста, а на три четвртине са другог. На првом тесту је било 30 питања, а на другом 44. Колико је било тачних одговора укупно?*

Решење. Вероватноћа тачног одговора на првом тесту је $p_1 = \frac{2}{3}$, са бројем покушаја $r_1 = 30$, па је студент имао $s_1 = \frac{2}{3} \cdot 30 = 20$ погодака. На другом тесту било је $p_2 = \frac{3}{4}$ и $r_2 = 44$, са бројем тачних одговора $s_2 = \frac{3}{4} \cdot 44 = 33$. Укупно на оба теста било је тачних $s = 20 + 33 = 53$ одоговора. Због

$$pr = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{30^2 + 44^2} \approx 53,4$$

опет је тачна неједнакост (3.3). □

Пример 3.1.3. *Положај и импулс честице су дате са неодређеношћу појединих компоненти (апсцисе, ординате и апликате):*

$$\Delta\mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z), \quad \Delta\mathbf{p} = (\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z).$$

Колика је укупна неодређеност (3.1)?

Решење. Непосредно добијамо:

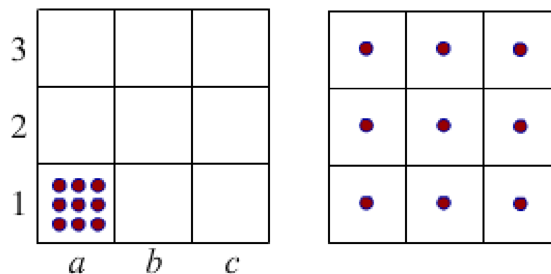
$$\begin{cases} s = \Delta x \Delta p_x + \Delta y \Delta p_y + \Delta z \Delta p_z, \\ s \le \Delta r \Delta p \end{cases} \tag{3.5}$$

где су интензитети $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ и $\Delta p = \sqrt{\Delta p_x^2 + \Delta p_y^2 + \Delta p_z^2}$. □

Приметимо да примењујући (3.1) не можемо спајати било шта са било чим. У првом и другом примеру је било интуитивно јасно да је спајање било у реду, али у трећем баш и није. У трећем примеру (3.5) се може правдати Хазенберговим релацијама неодређености из квантне механике, али то ћемо видети касније (уз слику 3.4). У неким још нејаснијим примерима скаларни производ (3.1) био би и теже објашњив, па и неприхватљив.

Независни догађаји су они код којих нити један од њих не утиче на исход неког другог. Таква су, на пример, различита бацања коцке када се вероватноћа датог броја не мења понављањем бацања. Зависни догађаји су они који нису независни.

Рецимо да имамо девет кутија (у три реда по три) и девет куглица. У сваку од кутија може стати свих девет куглица, али се куглице распоређују на случајан начин тако да свака од куглица може са истом вероватноћом ($p = \frac{1}{9}$) ићи у било коју од кутија.



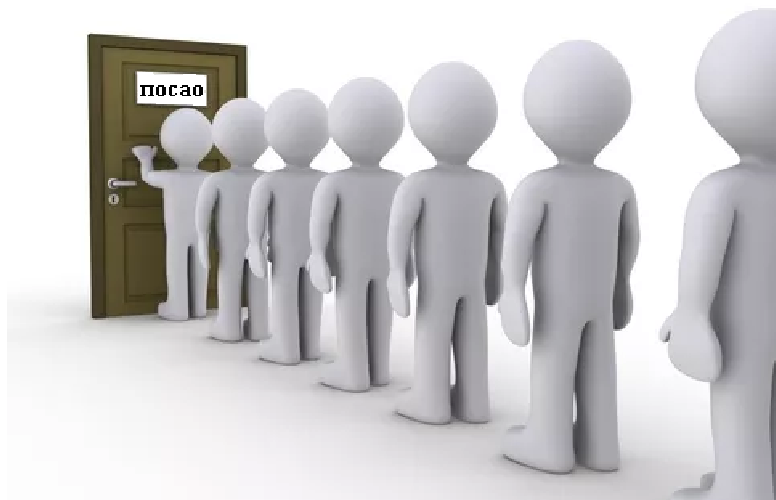
Slika 3.2: Распоређивање куглица у кутије.

На слици 3.2 лево свих девет куглица је у кутији $1a$, у првом ретку („1“) и првој колони („a“). Вероватноћа да (било која од девет) куглица буде баш у тој кутији је $\frac{1}{9}$, па је вероватноћа да их тамо буде свих девет $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \dots \frac{1}{9} = \frac{1}{9^9}$. Вероватноћа да свих девет куглица буде у било којој од девет кутија износи $\frac{1}{9^8}$. На истој слици десно, свака од куглица је у посебној кутији. Вероватноћа тог распореда је $\frac{9!}{9^9} = \frac{8!}{9^8}$, што је $8! = 8 \cdot 7 \dots 2 \cdot 1 = 40320$ пута више од претходне.

Другим речима, насумични распоред на датој слици десно биће више од 40 хиљада пута чешћи од онога лево, чак и ако све куглице могу бити у било којој од девет кутија. Честице ваздуха у соби налазимо распоређене на начин десно, просто зато што је тај распоред вероватнији. Не само у овом случају, неред (десно) је вероватнији догађај од реда (лево).

Вратићемо се на овај „проблем распоређивања" касније када будемо разматрали ентропију. Следећи занимљив проблем, који се такође тиче вероватноћа, јесте познати „проблем секретарице".

Рецимо да смо у комисији за избор секретарице. Знамо да пред вратима у реду стоји $n = 100$ нама потпуно непознатих особа, које ће једна по једна улазити у канцеларију на интервју, током којег ми требамо направити процену и донети одлуку о пријему у радни однос. Када проценимо да кандидаткиња неће бити примљена, она излази из собе и више се не враћа, а ми своју одлуку не можемо опозвати. Када проценимо да ће кандидаткиња бити примљена, прекида се процес бирања, без могућности да видимо преостале кандидаткиње. Постоји ли нека оптимална стратегија избора најбоље кандидаткиње?



Slika 3.3: Проблем избора секретарице.

За овај проблем (слика 3.3) теорија вероватноће има следеће решење. Пропустимо око једне трећине кандидаткиња (тачније $n/e = 37$) да би стекли представу колико оне могу имати бодова. Затим бирамо прву следећу која има више бодова од све и једне из прве групе. Ако нити једна нема више бодова, бирамо последњу.

Оптимални број n/e, где је Ојлеров број $e = 2,71828\ldots$, јесте заправо права мера тих n могућности, па га можемо сматрати и информацијом, односно мером неизвесности скупа са n непознатих случајних исхода. Код такве процене информације није потребно имати расподелу вероватноћа, али је резултат једнак ономе добијеном из Шенонове формуле (1.19) када радимо у натима.

Наиме, како је $-\ln\frac{1}{e} = \ln e = 1$, свих n логаритама у Шеноновој формули су

јединице, па је укупни збир n/e, а то је једнако процени информације помоћу „проблема секретарице“.

Ова чудна вероватноћа $1/e$ се често појављује, неретко на необичним местима. Ево једног таквог примера који се у литератури назива „проблем поштара“.

Поштар треба $n \in \mathbb{N}$ писама да достави на n адреса. Знамо да постоји само један начин да свако писмо доспе тачно тамо где је упућено, а знамо да је број начина да се те адресе помешају $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$. То је број који веома брзо расте. Дакле, вероватноћа (насумичне) тачне доставе све и једног писма је $1/n!$, односно тачна случајна достава већ и осредњег броја писама је скоро немогућ догађај.

Међутим, нетачна достава све и једног писма има вероватноћу $1/e$. Наиме, тачна достава једног писма има вероватноћу $1/n$, па нетачна достава тог писма има вероватноћу $1-1/n$. Нетачна достава свих n писама има вероватноћу $(1-1/n)^n \to e$, када $n \to \infty$.

3.2 Информација

Простор случајних догађаја Ω је скуп свих могућих исхода неког експеримента. *Вероватноћа* је мера изгледа да ће се десити неки догађај $X \subseteq \Omega$. Она је реална функција $\Pr(X)$ домена Ω и кодомена у интервалу [0,1] реалних бројева. Ако вероватноћа да ће се један догађај десити нимало не утиче на вероватноћу дешавања неког другог догађаја, онда за та два догађаја кажемо да су *независни*. Догођаји се *узајамно искључују* ако се не могу десити истовремено.

Хартлијева *информација* или неизвесност случајног догађаја вероватноће P је у *натима*:

$$I = -\ln P. \tag{3.6}$$

На пример, при бацању коцке информација је $\ln 6 \approx 1.79$ нат. Нат је јединица информације за природни логаритам базе $e = 2.71828\dots$, која се у користи чешће него логаритам базе 10, чија јединица је *децит* или базе 2 јединице *бит*. Реални број P је између 0 и 1, а логаритам таквог је негативан, па је информација позитиван број, од нула до бесконачно.

Скуп узајамно искључивих догађаја са одговарајућим вероватноћама $P_j = \Pr(X_j)$, такав да им је збир 1, називамо *комплетан* скуп догађаја. Комплетан скуп догађаја придружен одговарајућим вероватноћама назива се *расподела* вероватноћа. За $j = 1, 2, \dots, n$, пишемо:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix}, \quad \sum_{j=1}^{n} P_j = 1.$$

Када имамо расподелу вероватноћа случајне променљиве X, средња вредност Хартлијевих информација:

$$\langle I \rangle = -\sum_{j=1}^{n} P_j \ln P_j, \tag{3.7}$$

назива се Шенонова информација. Једноставно речено, Шенонова информација је средња вредност неизвесности. То је дефиниција *дискретне* информације, која укључује и екстремни случај $n \to \infty$.

Слично се дефинише информација континуума. Када је дата густина ρ инфинитезималне вероватноће $\rho d\tau$, где је $d\tau$ инфинитезимални део простора случајних догађаја Ω, тада је просечна информација:

$$\langle I \rangle = -\int_{\Omega} \rho \ln \rho d\tau. \tag{3.8}$$

На пример, *нормална расподела*:

$$\rho(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{3.9}$$

има просечну информацију:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} \ln(2\pi e \sigma^2). \tag{3.10}$$

Заиста, израчунавамо редом:

$$\langle I \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, \mu, \sigma) \ln \rho(x, \mu, \sigma) dx =$$

$$= -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left[\ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right] dx$$

$$= \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-\mu}{2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right]$$

$$= \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) + \ln\sqrt{e} = \frac{1}{2} \ln(2\pi e \sigma^2).$$

Параметар μ је *средња вредност* или очекивање дистрибуције, а σ је њено расипање које се назива *стандардна девијација.*

Упоређујући (3.10) са Хартлијевом информацијом видимо да $n = \sqrt{2\pi e \sigma^2}$ може имати природу броја могућих исхода, односно да је $\frac{1}{n}$ вероватноћа тих исхода. То значи, да где год имамо нормалну расподелу можемо је дефинисати (3.10) као Хартлијеву информацију, а онда даље тражити и све последице такве дефиниције. Затим се намеће питање, да ли има смисла очекивати да је информација посебан физикални појам попут брзине, енергије, импулса? Друго је питање да ли за информацију можда важи неки закон одржања количине, да њена количина не може спонтано настати нити нестати, већ да она може само прелазити из једног облика у други, попут енергије?

Ево једне анализе ових питања са становишта специјалне теорије *релативности*. Имамо два инерцијална координатна система K и K' који се узајамно крећу брзином v дуж апсциса. Нека је K' референтни систем са посматрачем у исходишту. Рецимо, ми седимо у исходишту K' и посматрамо K који клизи брзином v низ x-осу. У односу на наш сат, онај у систему K заостаје. То је познати релативистички ефекат дилетације времена.

Зато што време у K тече спорије у односу на нас у K', посматрач из тог система у доласку мора да види нашу будућност да би се тек у тренутку мимоилажења наше садашњости поклопиле. Након мимоилажења, у одласку тај посматрач гледа све даље у нашу прошлост, јер му је време и даље успорено у односу на наше.

Као што је познато, коефицијент тог успоравања је $\beta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, где је c брзина светлости у вакууму и он може бити број од нула до бесконачно, када је (константна) брзина v од нула до c. То значи да веома брзе честице, које се крећу инерцијално брзинама блиским брзини светлости једна другој виде или дубоку прошлост или далеку будућност. То онда значи да су прошлост и будућност физичке реалности, бар што се тиче инерцијалних кретања, а то онда значи да има смисла говорити и о количини информације коју оне носе.

Међутим, реалност времена на начин како смо то управо констатовали сада отвара проблем егзистенције неизвесности, па према томе и саме информације. Ако посматрачи из поменутих инерцијалних система јасно виде прошлост и будућност Универзума, онда су та прошлост и будућност детерминистички одређене, без могућности промена, без колебања или произвољности. У таквом Универзуму нема места за вероватноће нити за информацију! Тако смо дошли до парадокса неизвесности.

Како изаћи из овог парадокса, а и даље веровати да је теорија релативности једна од најтачнијих теорија (изван математике)? Ево једног решења које сам (узалуд) заступао још као студент математике у Београду, око 1980. године.

Инерцијални системи су они у којима посматрач не осећа дејство убрзања или гравитационе силе, било да се ради о једноликом праволинијском кретању изван дејства гравитационих поља или о слободном паду у таквом пољу. Ајнштајнова специјална и општа теорија релативности важе за таква, инерцијална кретања. Међутим, постоје и друга, неинерцијална кретања!

На пример, ротација. Њутн[3] је својевремено узимао систем који ротира за доказ егзистенције „апсолутног простора“. Он је посматрајући лавор са водом који се окреће висећи окачен о плафон приметио удубљење и просипање воде из лавора. Вода се окретала и због центрифугалне силе просипала док је соба мировала, а обрнуто објашњење не би било прихватљиво (да лавор мирује са водом која се просипа и собом која се окреће).

Овај проблем је мучио Ајнштајна годинама (у периоду 1905-1916.) када је имао повремено опречне ставове о систему који ротира, све до објављивања опште теорије релативности коју је везао за инерцијалне системе искључујући ротацију. У систему

[3] Isaac Newton (1642-1727), енглески матемаичар.

који ротира појављују се Кориолисове[4] силе које можемо мерити[5] и извести закључак да смо у систему који не мирује. Насупрот томе, у инерцијалном систему није могућ сличан физикални експеримент ради потврде кретања.

Други проблем унутар ротације била би немогућност усклађивања сатова. У инерцијалним системима, попут поменутих K и K', без обзира на то што у једном у односу на други време тече спорије, увек је могуће померањем часовника од тачке до тачке постићи неко непрекидно време по целом простору, како унутар система K тако и унутар система K', без обзира што два тако синхронизована времена нису међусобно истовремена. Сваки од та два система има своје „сада“ које његово 4-димензионално простор-време дели на два дела, одвајајући му прошлост од будућности.

У систему који ротира синхронизација времена није могућа. Када кренемо по некој кружници око центра ротације због брзине кретања тог руба време му иде спорије у односу на оно у центру, па док стигнемо до краја кружнице појави се дисконтинуитет. У систему који ротира не постоји такво „сада“ које раздваја његову прошлост од будућности!

Међутим, управо ова последња тешкоћа за теорију релативности представљаће решење за наш претходно поменути парадокс неизвесности. Да би разумели то решење приметимо да реалност произвољности значи могућност развоја догађаја у неку другу димензију. Ако ја сада заиста могу урадити неко A или урадити неко друго B, онда би та оба исхода морала бити негде реална, без нарушавања закона физике, или логике, осим што онај други исход који нисам урадио ни не видим. Поставља се питање: колико димензија има физички свет?

Одговор ћемо потражити у математици, у њеној грани топологији која је специјализизована за проблеме димензија, јер од тога не постоји ништа тачније. Једна од тополошких дефиниција димензије може се свести на индуктивну[6]:

Ако се неки скуп тачака може поделити на два дела границом чија димензија је $n = 0, 1, 2, \dots$, онда је читав скуп димензије $n + 1$. Ако та подела није могућа, читав скуп има више од $n + 1$ димензија.

Дакле, тачка има димензију нула и коначан скуп тачака има димензију 0. Права, кружница и уопште крива линија имају димензију 1, јер се са једном или коначно много тачака могу поделити на два дела. Коначни скуп линија такође има димензију 1. Површ има димензију 2, јер се помоћу линија може разделити на два дела. Простор има димензију 3, јер се помоћу површи може поделити на два дела. Инерцијално простор-време има димензију 4, јер је у њему могућа синхронизација сатова која ће дефинисати садашњост, 3-дим простор, која ће одвојити његову прошлост од будућности. Међутим, у систему који ротира није могућа синхронизација сатова, што значи да није могућ 3-дим простор са (сопственим) истовременим тачкама, те није могуће одвајање прошлости од садашњости помоћу 3 димензије. То значи да простор-време система који ротира има бар 5 димензија!

[4]Gaspard-Gustave de Coriolis (1792-1843), француски математичар.
[5]На површини Земље зато имамо кружно кретање циклона или воде у сливнику.
[6]негде је називају Урисонова

3.3 Квантна механика

Физичким експериментима се добијају информације које се могу тумачити као интеракције. Зато што су те информације у свакодневном свету занемарљиве, тешко би било приметити њихову физичку природу да није открића квантне механике. Откриће те њене друге природе даће нови значај информацији уопште.

Знамо да информацији претходи неизвесност[7] која је стање пре реализације случајног догађаја. *Количину неизвесности* случајног догађаја са $n \in \mathbb{N}$ једнако вероватних исхода дефинишимо као функцију $s : n \to \mathbb{R}$. Приметимо да функција $s(n)$ зависи само од $n = 1, 2, 3, \dots$ и да је растућа. Затим приметимо да је

$$s(m) + s(n) = s(mn), \quad m, n \in \mathbf{N}. \tag{3.11}$$

Наиме, нека су m и n бројеви исхода два независна случајна догађаја. Производ mn је број исхода оба. Ту особину има једино логаритамска функција.

Теорема 3.3.1. *Нека је $f(x)$ непрекидна функција дефинисана на супу реалних бројева $x > 1$. Ако је $f(x)$:*

1. позитивна, тј. за свако $x > 1$ је $f(x) > 0$;

2. растућа, тј. за $x_1 < x_2$ је $f(x_1) < f(x_2)$;

3. за свако дозвољено x_1, x_2 је $f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 x_2)$;

тада је $f(x) = C \cdot \log_b x$, где су $C > 0$, $b > 1$ произвољни реални бројеви.

Доказ. За свако $x > 1$ и за свако $r > 0$ постоји $k = 0, 1, 2, \dots$ такав да је

$$x^k \le 2^r < x^{k+1}.$$

Отуда и зато што је дата функција растућа (2.) је

$$f(x^k) \le f(2^r) < f(x^{k+1}),$$

па због следеће особине (3.) имамо:

$$kf(x) \le rf(2) < (k+1)f(x),$$

$$\frac{k}{r} \le \frac{f(2)}{f(x)} < \frac{k}{r} + \frac{1}{r}.$$

Функција $f(x) = \log_b x$, $b > 1$ има особине 1-3 па и за њу важи

$$\frac{k}{r} \le \frac{\log_b 2}{\log_b x} < \frac{k}{r} + \frac{1}{r},$$

а на основу тога је

$$\left| \frac{\log_b 2}{\log_b x} - \frac{f(x)}{f(2} \right| < \frac{1}{r},$$

[7] енг. *suspense* - неизвесност

за свако $r > 0$ па и за произвољно велико r, због чега је израз у апсолутној загради последње неједнакости нула, тј.

$$f(x) = \frac{f(2)}{\log_b 2} \cdot \log_b x,$$

односно $f(x) = C \cdot \log_b x$. □

Ако имамо функцију (3.11), али са аргументима позитивним бројевима мањим од један, тада пређемо на реципрочну вредност аргумента па применимо претходну теорему. Према томе, иста теорема важи и након смене $n = 1/p$ где је p вероватноћа реализације једног од n случајних догађаја. Следи $s(1/p) = \ln(1/p)$, односно

$$I(p) = s\left(\frac{1}{p}\right) = -\ln p, \tag{3.12}$$

а то је управо информација (3.6). Када вероватноћа p расте од 0 до 1, информација I опада од $+\infty$ до 0, и обрнуто.

Да реализацијом случајног догађаја сва количина неизвесности прелази у једнаку (количину) информације потврђује следећи пример.

Пример 3.3.2. *Бацање фер новчића.*

Објашњење. Фер новчић има $n = 2$ исхода „Писмо“ и „Глава“ једнаких вероватноћа $p(2) = \frac{1}{2}$. Неизвесност пре бацања новчића тачно је једнака информацији након и она износи $s(2) = \ln 2 \approx 0,69$ нат. □

Приметимо да се реализацијом једног случајног догађаја са два исхода решавамо две неизвесности. Неизвесност се у том случају понаша као систем спојених посуда са (нестишљивом) течношћу. То је мало јасније у следећем примеру.

Пример 3.3.3. *Пар рукавица, по једна у две једнаке кутије.*

Објашњење. Замислимо две раздвојене рукавице из пара и стављене по једна у две једнаке кутије од којих је једна отишла ко зна куда, а другу смо добили поштом. Пре отварања кутије имали смо неизвесност, након отварања информацију (унутра је лева, односно десна рукавица). Вероватноће за сваку од две могућности су једнаке, по пола, а количина неизвесности пре отварања кутије као и информација након отварања, је логаритам броја два. По пријему те информације нестало је неизвесности, не само за отворену већ и за ону кутију коју немамо. □

Следећи пример показује да се неизвесност може одузимати део по део од неког стохастичког система и претварати у информацију. Укупна количина неизвесности пре, као и збир појединих количина током, једнаки су укупној информацији након исхода свих случајних догађаја.

Пример 3.3.4. *Више предмета по један у више једнаких кутија.*

Објашњење. Када имамо $n \geq 2$ предмета, рецимо означених бројевима $1, 2, 3, \dots, n$ и стављених по један у n једнаких кутија, информација коју добијамо након отварања прве, друге, ..., $n-1$, износи редом:

$$\ln n, \quad \ln(n-1), \quad \dots, \quad \ln 2. \tag{3.13}$$

Последњу, n-ту кутију не треба отварати, ако пажљиво пратимо које смо предмете претходно пронашли. □

Приметимо да процес одузимања део по део неизвесности и додавања информаци подсећа на трансформације енергије из једног облика у други. Слично енергији чија количина је у затвореном систему увек константна, овим примерима промовишемо закон одржања количине неизвесности, односно информације.

Пример 3.3.5. *Неодређеност једнаких пермутација.*

Објашњење. Укупна добијена информација након отварања свих поменутих кутија из претходног примера једнака је збиру

$$\ln n + \ln(n-1) + \dots + \ln 2 = \ln n! \tag{3.14}$$

дакле једнака је информацији коју добијемо избором једне од $n! = 1 \cdot 2 \dots n$ једнако вероватних пермутација $n \in \mathbb{N}$ елемената. □

Посебно је питање: да ли је информација која се добија из описаних неизвесности постојана, да ли за њу важи закон одржања? Позитиван одговор долази и из самог чина мерења. Зато што мерење можемо сматрати поузданим доказом, зато верујемо да је сама информација постојана а њен пренос од интеракције квантног система и апаратуре па до експериментатора одржив. Несвесно поверење у постојаност информације било је у самим темељима експерименталне физике, много пре открића теорије информације. Оно што би могло бити упитно овде само је однос математичке информације (3.6) и те интуитивне.

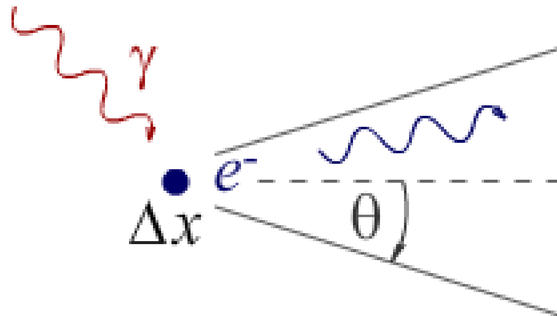
Када знамо да ће се нешто десити и то се деси, информација је нула. Редак догађај носи већу информацију, па је већа вест „човек је ујео пса“ од вести „пас је ујео човека“. На сличан начин добијамо још неколико потврда да су наведене дефиниције неодређености и информације интуитивно прихватљиве те да је и примена њихових последица оправдана.

Са друге стране, усвајање закона одржања информације отвара нам неке нове могућности. Рецимо за објашњавање тока времена. Оно што називамо садашњост је (3-дим) простор са константном (укупном) информацијом која нам пристиже из сталне реализације случајних догађаја. Приметимо ли да та информација долази из неизвесности (будућности) и одлази у неизвесност (прошлости), онда требамо усвојити још два закључка. Садашњост иде ка вероватнијим, а одлази од мање вероватних догађаја.

Наиме, пример 3.3.4 сведочи да формирање информације дефинишем систем. Када се то једном примети, постаје прилично јасно да преласком дела неизвесности

у информацију дати систем постаје боље одређен. Вероватноће његових евентуалних исхода се повећавају. Зато ће, на пример, тек мерење електрона дефинисати његову путању, што се често наводи као чудо квантне механике. Зато се отварањем кутије у којој се налази Шредингерова мачка и сазнањем да ли је та мачка жива или мртва дефинише и њено стварно претходно недефинисано стање. Обратно, повећање вероватноћа физичког система праћено је губитком неизвесности односно формирањем информације. Ток времена нас носи ка вероватнијим догађајима.

Према томе, када не би било могућности да случајни догађаји око нас, физичка реалност, спонтано прелазе из стања мање у стања веће вероватноће, тада би време стало. Хипотеза са оваквим последицама тражи још потврда. Потражимо их у Хајзенберговим[8] релацијама неодређености.



Slika 3.4: Хајзенбергов микроскоп.

На Хајзенберговом микроскопу, слика 3.4, видимо тачније одређивање позиције честице које доводи до нетачнијег одређивања њеног импулса и обрнуто. Приказан је електрон (e^-) погођен гама-зраком (γ). Да бисмо имали већу тачност лоцирања електрона треба нам мања таласна дужина (λ') зраке, што значи већи импулс (p'), јер је $\lambda' p' = h$. Већи импулс даје већи распон углова θ и већу неодређеност у будућем кретању електрона, посебно његовог импулса. Када је неодређеност позиције електрона $\Delta x = \lambda'$, а неодређеност његовог импулса $\Delta p = p'$, у повољном случају је $\Delta x \Delta p = h$. Иначе, овако добијена неодређеност је подцењена, па на десној страни неједнакости стављамо $\hbar = h/2\pi = 1,055$ Js и добијамо:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{3.15}$$

Прецизна мерење (в. [5]) показују да на десној страни може бити и мањи број.

По другим координатним осама (x, y, z) добијамо и остале Хајзенбергове релације неодређености положаја и импулса, док су недоређености дуж једне осе независне од неодређености друге. Међутим, постоји и сличан минимум производа за време и енергију $\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$ иако време није обзервабла. Све четири здружено можемо писати

$$\Delta x \Delta p_x + \Delta y \Delta p_y + \Delta z \Delta p_z + \Delta t \Delta E \geq 2\hbar, \tag{3.16}$$

[8]Werner Heisenberg (1901-1976), немачки теоријски физичар.

што подсећа на (3.5).

Када бисмо леву страну неједнакости (3.16) формално дефинисали као скаларни производ (интелигенције и хијерархије) са почетка књиге, онда би то морао бити мањи број од ($2\hbar$) који можемо добити мерењем. Због усклађивања физичких јединица, тада бисмо требали посебно положаје и посебно импулсе сматрати пропорционалним са компонентама неких вектора чији скаларни производ је информација (слобода), али нећемо. Када већ добро проверене физичке величине (положај, импулс, енергија) из макро-света изгледају као да су насилу угуране у микро-свет, ко зна на шта би личило слично гурање ових нових, друштвених појмова.

Међутим, можемо приметити следеће. Ако се неодређености положаја (времена) повећавају, тада се неодређености импулса (енергије) смањују, али не сасвим тачно онако као да су прве вероватноће а друге (негативни) логаритми тих вероватноћа. Оне се не понашају као једна расподела вероватноћа (мултитаскинг).

Држећи се закона одржања укупне количине неизвесности и информације водимо рачуна да се повећањем вероватноће смањује (негативни) логаритам те вероватноће. Дакле, експериментатор добија информацију рецимо о положају електрона, чиме се умањује неизвесност положаја, смањује се Δx, а због одржања количине неизвесности положаја-импулса, повећава се неизвесност импулса и повећава неодређеност Δp_x. Тај процес допуњавања неизвесности је могућ ако положај и импулс електрона могу комуницирати узајамно и комуницирати са мерном апаратуром.

Када знамо да на начин сличан претходном комуницирају нека друга два стања квантног система, са средњим информацијама редом:

$$I_1 = \frac{1}{2}\ln(2\pi e\sigma_1^2), \quad I_2 = \frac{1}{2}\ln(2\pi e\sigma_2^2), \tag{3.17}$$

датима са (3.10), онда из zбира $I_1 + I_2 = \text{const.}$ следи $\sigma_1\sigma_2 = \text{const.}$ односно

$$\sigma_1\sigma_2 \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{3.18}$$

мерењем.

Пресудна за ово физикално тумачење информације је вероватноћа у квантној механици. Објаснити ћемо то укратко. Стање $|\psi\rangle$ система представљамо линеарном суперпозицијом сопствених стања $|\psi_n\rangle$ одговарајућег оператора $\hat{A}$ који представљају обзерваблу A коју меримо:

$$|\psi\rangle = \sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|\psi\rangle = \sum_n a_n|\psi_n\rangle. \tag{3.19}$$

Мерењем обзервабле A мења се стање система $|\psi\rangle$ у једно од сопствених стања $|\psi_n\rangle$ оператора $\hat{A}$ и добија се сопствена вредност a_n. Једини изузетак овога је када је систем већ био у једном од сопствених стања обзервабле која се мери. На пример, ако је систем у сопственом стању $|\psi_n\rangle$, мерење обзервабле A даје са извесношћу вредност a_n без промене стања $|\psi_n\rangle$.

Уопште, у *дискретном* спектру, када меримо неку обзерваблу A система $|\psi\rangle$, вероватноћа[9] добијања једне недегенерисане сопствене вредности a_n одговарајућег оператора $\hat{A}$ износи

$$\Pr(a_n) = \frac{|\langle\psi_n|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle}, \tag{3.20}$$

где је $|\psi_n\rangle$ сопствено стање $\hat{A}$ са сопственом вредношћу a_n. За m пута дегенерисану сопствену вредност вероватноћа је

$$\Pr(a_n) = \frac{\sum_{j=1}^m |\langle\psi_n^j|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle}. \tag{3.21}$$

Аналогно важи за *континуални* спектар:

$$\frac{d}{da}\Pr(a) = \frac{|\psi(a)|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{|\psi(a)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(a')|^2 da'}, \tag{3.22}$$

задат помоћу густине вероватноће налажења вредности обзервабле у интервалу од a до $a + da$.

Борн[10] је био тај који је 1927. године први протумачио $|\psi|^2$ као густину вероватноће, а $|\psi(\vec{r},t)|^2 d^3r$ као инфинитезималну вероватноћу $dP(\vec{r},t)$ налажења честице у тренутку t у запреминском елементу d^3r простора S лоцираном између $\vec{r}$ и $\vec{r} + d\vec{r}$:

$$|\psi(\vec{r},t)|^2 d^3r = dP(\vec{r},t). \tag{3.23}$$

Укупна вероватноћа налажења честице негде у простору мора бити један:

$$\int_\Omega |\psi(\vec{r},t)|^2 d^3r = 1. \tag{3.24}$$

Приметимо да се због последњег услова (нормирања вероватноћа на јединицу) унутар датог квантно механичког система подразумева мултитаскинг, што је специјални случај мултипроцесирања.

Пример 3.3.6. *Када је информација квантног система константна?*

Решење. Густина Борнове вероватноће је $|\Psi|^2 = \Psi^*\Psi$, где је таласна функција у најопштијем облику $\Psi = \Psi(x,y,z,t)$. Информација је логаритам тог броја. Ако се она не мења променом координате $\xi \in \{x,y,z,t\}$, тада је $\partial_\xi(-\ln|\Psi|^2) = 0$, а отуда:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(-\ln|\Psi|^2) = -\frac{\partial}{\partial\xi}\ln(\Psi^*\Psi) = -\frac{1}{|\Psi|^2}\left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial\xi}\Psi + \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial\Psi^*}{\partial\xi}\Psi + \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} = 0, \tag{3.25}$$

[9] енг. Probability - вероватноћа
[10] Born rule: https://en.wikipedia.org/wiki/Born_rule

$$\Psi = C_\xi e^{ic_\xi \xi/\hbar}, \quad i = \sqrt{-1}, \tag{3.26}$$

где су C_ξ и c_ξ непознате константе. Бирајући различите координате ξ налазимо таласну функцију:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = Ce^{i(\omega t - k\mathbf{r})/\hbar}, \tag{3.27}$$

где је $\mathbf{r} = (x, y, z)$ вектор положаја. То је равни талас. □

Приметимо да и у дискретном случају вероватноћа, услов да оне чине расподелу (збир вероватноћа је један) и да је информација константна, такође води до истих једначина (3.25) и истог решења, равног таласа. Таласну функцију можемо писати и на следећи начин

$$\psi(\vec{r}, t) = Ce^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)/\hbar}, \tag{3.28}$$

где је C нека константа, $\vec{p}$ вектор импулса, $\vec{r}$ вектор положаја, а E енергија. Та функција задовољава основну једначину кретања слободне честице:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0, \tag{3.29}$$

која је (не-релативистичка) временски независна Шредингерова једначина квантне механике, за талас-честицу унутар датог простора (кутије), потенцијалне енергије $U(x) = 0$. Израчунавамо да је енергија такве честице:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \tag{3.30}$$

Једна честица може имати произвољну вредност енергије; њен спектар енергија је континуалан.

Услов нормираности густина вероватноћа, $\int_\Omega \psi^* \psi \, d\xi = 1$, такође води до једначина облика (3.25), што можемо писати и овако:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = ia\psi, \ \frac{\partial \psi}{\partial x} = b_x\psi, \ \frac{\partial \psi}{\partial y} = b_y\psi, \ \frac{\partial \psi}{\partial z} = b_z\psi, \tag{3.31}$$

где су a, b_x, b_y, b_z реалне константе. Множећи сваку од једначина произвољним коефицијентом и сабирајући добијамо

$$\lambda_t \frac{\partial \psi}{\partial t} + \lambda_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \lambda_z \frac{\partial \psi}{\partial z} = i\lambda\psi, \tag{3.32}$$

при чему је $\lambda = a\lambda_t + b_x\lambda_x + b_y\lambda_y + b_z\lambda_z$.

То је линеарна парцијална диференцијална једначина која представља физички систем података константне информације. Бирајући коефицијенте ламбда тако да је једначина инваријантна на Лоренцове трансформације[11] могуће је добити *Диракову* једначину[12] квантне механике.

[11] Lorentz transformation: `https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_transformation`

[12] Dirac equation: `https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_equation`

Узимајући друге изводе по истим координатама полазне четири једначине, након множења са произвољним бројевима и сабирањем, налазимо:

$$\mu_t \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \mu_x \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \mu_z \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \mu\psi = 0, \tag{3.33}$$

где је

$$\mu = a^2\mu_t + b_x^2\mu_x + b_y^2\mu_y + b_z^2\mu_z.$$

На пример, бирањем константи

$$\mu_x = \mu_y = \mu_z = 1,\ \mu_t = -\frac{1}{c},$$

где је c брзина светлости у вакууму, добијамо једначину квантне механике познату као *Клајн-Гордонова.* Она добро описује честице без спина (спин 0). Када је откривена 1926. године, Шредингер је приметио да она даје лошије резултате за атом водоника (спин ±1) од његове нерелативистичке.

Узимајући за брзину светлости приближно $c \to \infty$ и бирајући коефицијенте $\mu_x = \mu_y = \mu_z = 1$, $\mu_t = 0$ последња једначина (3.33) постаје:

$$\nabla^2\psi + \mu\psi = 0, \tag{3.34}$$

коју препознајемо као Шредингерову, под условом:

$$\mu = \frac{8\pi^2 m}{h^2} E.$$

Све ово указује да начин и лакоћа са којом прелазимо са једначине облика (3.32) на (3.33) па опет на Шредингерову (3.34), долазе од ограничења закона одржања неизвесности и информације.

Када честица нема спина, или када је она у инерцијаланом систему, или када имамо равни талас, тада важи закон одржања информације. Напротив, рецимо када коефицијент C код функције облика (3.27) није константан, то не мора бити. То нас наводи на претпоставку да укупну информацију квантног система могу променити вањске силе, а затим да је нарушавање одржања информације у вези са правцем временског тока[13].

Са друге стране, једначина (3.1) је на корак од матричних једначина квантне механике. Пишимо редом:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = s,$$

$$p_1 r_1 + p_2 r_2 + \cdots + p_n r_n = s,$$

$$\begin{cases} b_{11}r_1 + b_{12}r_2 + \cdots + b_{1n}r_n = r_1 s, & b_{1k} = r_1 p_k, \\ b_{21}r_1 + b_{22}r_2 + \cdots + b_{2n}r_n = r_2 s, & b_{2k} = r_2 p_k, \\ \dots \\ b_{n1}r_1 + b_{n2}r_2 + \cdots + b_{nn}r_n = r_n s, & b_{nk} = r_n p_k, \end{cases}$$

[13] в. примедбе на крају претходне секције: 3.2 Информација

где је индекс $k = 1, 2, \dots, n$. Кратко, матрично пишемо:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}, \tag{3.35}$$

односно:

$$\hat{B}\mathbf{r} = s\mathbf{r},$$

Мада је наизглед веома далеко од информације, ово јесте по форми типична једначина Хајзенбергове матричне квантне механике. Коефицијенти b_{jk} су комплексни бројеви, а матрица $\hat{B}$ је Хермитска. Та матрица, њен сопствени вектор $\mathbf{r}$ и сопствена вредност s представљају стања квантног система, његове варијабле и обзервабле. На крају ево неколико познатих примера употребе ових матрица.

Којманова[14] ентропија је проширење класичне Гибсове ентропије, о којој ћемо више говорити у следећој секцији, на статистичку квантну механику. За квантно механички систем који је описан матрицом густине $\hat{\rho}$, ова ентропија се дефинише са

$$S = -\text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}),$$

где $\text{Tr}(\dots)$ значи траг (збир дијагоналних елемената) матрице у загради. Када је $\hat{\rho}$ писано помоћу сопствених вектора $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, \dots$ тада је густина

$$\hat{\rho} = \sum_j a_j |j\rangle\langle j|,$$

па је Нојманова ентропија

$$S = -\sum_j a_j \ln a_j.$$

Ево неколико једноставних примера.

Нека је мешано стање $|0\rangle$ вероватноће $1/2$ и $|1\rangle$ вероватноће $1/2$, тада је:

$$|0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$S = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

Други пример, имамо векторе:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle),$$

[14]John von Neumann (1903-1957), мађарско-амерички математичар.

оба вероватноће $1/2$. Отуда:

$$|+\rangle\langle+| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix},$$

$$|-\rangle\langle-| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix},$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}|+\rangle\langle+| + \frac{1}{2}|-\rangle\langle-| = \begin{pmatrix}1/2 & 0\\0 & 1/2\end{pmatrix},$$

$$S = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

Дакле, добили смо две идентичне матрице густине и два једнака резултата за ентропију S, иако су полазна мешана стања различита. Па ипак матрица густине мешавине потпуно одређује ефекте мерења. То видимо из следећег примера.

Пример 3.3.7. *Нека је дато мешано стање у ортонормираној бази $|\alpha_j\rangle$. Показати да исходи $|\alpha_j\rangle$ имају вероватноће $\langle\alpha_j|\hat{\rho}|\alpha_j\rangle$.*

Решење. Нека су стањима $|\psi_k\rangle$ придружене вероватноће p_k, при чему важи $0 \leq p_k \leq 1$ и $\sum_k p_k = 1$. Означимо вероватноћу мерења $|\alpha_j\rangle$ са $\Pr(j)$. Тада је:

$$\Pr(j) = \sum_k p_k |\langle\psi_k|\alpha_j\rangle|^2 = \sum_k p_k \langle\alpha_j|\psi_k\rangle\langle\psi_k|\alpha_j\rangle =$$

$$= \left\langle \alpha_j \,\middle|\, \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \,\middle|\, \alpha_j \right\rangle = \langle\alpha_j|\hat{\rho}|\alpha_j\rangle,$$

а то је и требало показати. □

3.4 Ентропија

Реч *ентропија* (грч. $\epsilon\nu\tau\rho o\pi\eta$ - обрт ка унутра) увео је у физику Клаузијус 1865. године да представи меру за „везану“ енергију неког затвореног материјалног система, тј. за енергију која се, насупрот „слободној“, више не може претворити у рад. Супротни појам је *ектропија.* Тек је Болцман (Предавања о принципима механике, 1897. до 1904) ентропијом означио топлотни садржај термодинамичког система, односно енергију кретања његових молекула.

Ентропија S је мера неуређености система. На најнижој могућој температури, на апсолутној нули[15], гас би се (у теорији) могао сабити тако да би постигао нулту запремину и имао нулту ентропију. Међутим, тако ниска температура се не може постићи (Трећи принцип термодинамике) и тако ниска ентропија је немогућа. Ако се телу на температури T (у Келвинима) преда мала количина топлоте ΔQ ентропија тела повећаће се за:

$$S = \frac{\Delta Q}{T}. \tag{3.36}$$

Други принцип термодинамике каже да се топлота може пренети само са топлијег на хладније тело, односно да ентропија спонтано не може да опада. Систем препуштен самом себи настоји да пређе из стања мање у стање веће неуређености.

Када неки предмет падне његова кинетичка енергија ударом у подлогу постаје топлотна, мало загревајући подлогу на месту пада. Овај процес је *иреверзибилан*, јер обрнуто није могуће. Није могуће да предмет спонтано полети одузимајући топлотну енергију подлоге и претвори је у своју кинетичку, а затим у потенцијалну пењући се све више упркос гравитацији. У првом случају ентропија расте, у другом опада. Када лопта одскакује по поду правећи све мање лукове она се креће тако да јој се ентропија увећава, док обрнуто - све крупније одскакивање лопте спонтано - није могуће, јер би тада ентропија опадала. Када стаклена чаша падне на тврду подлогу и разбије се њена ентропија је већа, док обрнуто - спонтано скупљање срче и формирање неоштећене чаше није могуће, јер би тада њена ентропија постала мања.

Спонтаним процесима у термодинамици називају се иреверзибилна дешавања без спољашњег утицаја. То су процеси који једном започети теку (са временом) све до постизања равнотеже, без могућности супротног тока, осим у неким случајевима континуалног довођења енергије или рада. Међутим, сва топљења и испаравања су спонтане промене, а при томе троше енергију из околине!

Када се при физичкој или хемијској промени ослобађа топлота у околину тада кажемо да се догађа *егзотермна* реакција (егзо - напоље). Такво је гашење креча, горење дрвета или угља, неутрализација киселина и база, замрзавање. Ако се при физичкој или хемијској промени везује топлота из околине, дешава се *ендотермна* реакција (ендо - унутра). Ендотермно је кување ручка, растварање шалитре (KNO_3 - калијум нитрат), одмрзавање.

Егзотермни процеси су они којима је $\Delta Q < 0$, тј. промена топлоте у формули

[15]Степен Келвина (K) једнак је степену Целзиуса (C), али 0° K = $-273,150^\circ$ C.

(3.36) је негативна, јер они губе топлоту, а ендотермни код којих је $\Delta Q > 0$, јер они из околине узимају топлоту. Спонтани процеси могу бити и егзо и ендо-термни, па бољи критеријум спонтаности даје Други закон термодинамике који каже, да у свим случајевима спонтаних процеса материја прелази из уређенијег у мање уређено стање, да ентропија (3.36) остаје иста или да расте.

Истражујући статистички шта би то могло да значи Болцман[16] је открио формулу за ентропију:

$$S = k_B \ln W, \tag{3.37}$$

где је $k_B = 1,38065 \cdot 10^{-23}$ J/K Болцманова константа, а W је број могућих стања датог термодинамичког система. Он је ту формулу формулисао у периоду 1872-1875. године, да би јој тек Планк[17] дао велики значај употребивши је 1900. године за окриће квантовања енергије зрачења.

Откријем (Хартлијеве, 1928) информације Болцманова формула и ентропија добијају нови смисао. Ентропија је информација која недостаје након спонтаног догађаја, као што је термодинамичко претварање неког облика енергије у топлоту. Приметно је да тај спонтани догађај иде ка заузимању вероватнијих стања, па се помало неспретно каже да природа тежи ка повећању ентропије, односно ка вероватнијим стањима.

Доказиво је да мање уређена стање заиста имају већу вероватноћу. На слици 3.5 лево видимо две кутије и две куглице, обе у првој кутији. У случају једнаких вероватноћа куглица по кутијама вероватноћа тог распореда је $p_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. На истој



Slika 3.5: Распоређивање две куглице у две кутије.

слици десно имамо две исте кутије али са по једном куглицом у свакој. Вероватноћа таквог распореда је $p_2 = \frac{1}{2}$, дакле дупло је већа од вероватноће распореда лево.

Са повећањем броја кутија и куглица тај однос веома брзо расте. Тако већ у случају девет кутија и девет куглица (в. слику 3.2) имамо више од 40.000 пута већу вероватноћу равномерног распореда од нагомиланог. Једнолико распоређивање честица гаса по соби је много пута вероватније од неједноликог и зато се оне распоређују једнолико. Међутим, брзоплето је утврдити да ентропија расте са вероватноћом. Максимална вероватноћа P дефинише *оптимално стање* честица гаса, а број распореда $W = 1/P$ у том оптималном стању дефинише Болцманову ентропију (3.37).

У оригиналној формули (3.37) вредност W је заиста називана вероватноћом (нем. *Wahrscheinlichkeit*), али „термодинамичком вероватноћом" која је цели број већи од један. Она је број макроскопских стања за неку расподелу могућих микростања, за идеалан гас са N идентичних честица, од којих су N_j у j-том микроскопском стању

[16]Ludwig Boltzmann (1844-1906), аустријски физичар.
[17]Max Planck (1858-1947), немачки теоријски физичар.

(опсегу) положаја и импулса. Може се израчунати да је тај број

$$W = N!/\prod_j N_j! \tag{3.38}$$

где индекс j иде кроз сва могућа молекуларна стања, $\prod_j$ значи производ свих таквих, а ускличник (факторијел) означава пермутације. Користећи тај број ми овде радимо са „математичком вероватноћом“ $P = 1/W$ која је увек реалан број од нула до један, па Болцманова формула постаје

$$S = -k_B \ln P, \tag{3.39}$$

када је можемо називати и Хартлијевом.

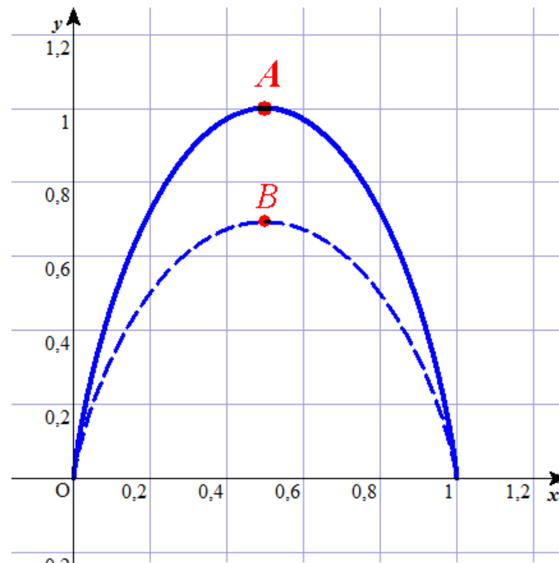
Расправимо сада појам „равномеран“ у Шеноновој информацији. У првом примеру видећемо да равномерно распоређене вероватноће дају максималну информацију, а у другом да се Шенонов резултат и иначе може добити равномерним сабирцима.

Пример 3.4.1. *Показати да се максимална информација у случају две могућности, $m = 2$, добија када су вероватноће једнаке, $P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$.*

Решење. Ставимо $P_1 = x$ па је $P_2 = 1 - x$. Шенонова информација је тада

$$\begin{cases} A: & y = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x), \\ B: & y = -x\ln x - (1-x)\ln(1-x), \end{cases} \tag{3.40}$$

изражено у „битима“ и „натима“, тј. у случају логаритамске базе 2 и $e = 2,718\ldots$.



Slika 3.6: Информација (2.14).

На графикону 3.6 виде се тачке $A(\frac{1}{2}, 1)$ и $B(\frac{1}{2}, \ln 2)$ које представљају максимуме функција (3.40). Помоћу извода може се доказати да су то заиста максимуми. Приметимо да се повећањем базе логаритма Шенонова крива спушта, али је увек симетрична и има минимуме у тачкама 0 и 1 апсцисе. □

У математичкој теорији информације[18] доказује се општи став да је Шенонова информација максимална када су све вероватноће дате расподеле међусобно једнаке.

Пример 3.4.2. *Показати да је максимум функције* $y = -x\ln x$ *тачка* $T(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$.



Slika 3.7: Информација (2.14).

Решење. Покажимо то помоћу извода. Из $y'(x_0) = -\ln x_0 - 1 = 0$ следи $x_0 = \frac{1}{e}$ а затим $y(x_0) = \frac{1}{e}$. На слици 3.7 плав је граф функције, а тачка максимума $T(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$. □

Тачка T на датој слици даје максималан сабирак у Шеноновој формули (1.19). Примену вероватноће $1/e$ већ смо помињали у „проблему секретарице“, али овде само наглашавамо да се природа држи оптималних стања, а да њих види у равномерним дистрибуцијама, које ми опет разумемо као стања највећег нереда. Дакле, тражећи оптимуме природа тежи повећању ентропије.

Трећа ствар за расправу овде је проширење Шенонове формуле на $s = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$. То је скаларни производ вектора који (за константне интензитете) има максималну вредност када је угао између вектора нула, односно када важи пропорција:

$$r_1 : r_2 : \ldots : r_n = p_1 : p_2 : \ldots : p_n, \tag{3.41}$$

где су r_k и p_k редом компоненте датих вектора. Лако уочавамо да је то такође врста „равномерности“, која би у Шеноновој формули обезбедила максималну информацију. Што се тиче саме форме не смета што ови r-ови и p-ови не морају бити нити вероватноће нити логаритми вероватноћа. Довољно је приметити да се у специјалном случају, $r_k = P_k$ и $p_k = -\ln P_k$ за $k = 1, 2, \ldots, n$, ова формула своди на Шенонову.

Вратимо се сада Клаузијусовој дефиницији да је ентропија потрошени рад. Из (3.36) то исто можемо приметити држећи температуру константном, јер је топлота енергија, односно рад. Са друге стране, знамо да је механички рад савлађивање

[18] в. [3]

отпора дуж неког пута. Рад је позитиван ако се тело креће у смеру силе која на њега делује, а негативан у супротном смеру. Према томе, сила не врши рад само онда ако је у равнотежи са отпором.

Као што знамо из наставе физике у школи рад A константне силе $\mathbf{F}$ на путу $\mathbf{r}$ једнак је:

$$A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}, \tag{3.42}$$

односно, рад је скаларни производ вектора силе и вектора пута. Подсећам, јединица за рад у Међународном систему јединица је џул ($\mathrm{J} = \mathrm{kg\ m^2/s^2}$, односно Nm), а овај производ силе и дужине у физику је око 1930. увео Кориолис[19].

На пример, ако сила од 10 N вуче тело на путу 3 m, она изврши рад $A = 30$ J. Мало општије, тело масе m са сталним убрзањем $a = F/m$ на крају пута $r = a \cdot t^2/2$ имаће брзину $v = at$, па налазимо кинетичку енергију:

$$A = F \cdot r = m \cdot a \cdot \frac{a \cdot t^2}{2} = m \cdot \frac{(a \cdot t)^2}{2} = \frac{m \cdot v^2}{2} = E_k, \tag{3.43}$$

што значи да је рад (A) силе (F) једнак кинетичкој енергији (E_k) коју тело добије на пређеном путу (r). У оба примера, сила и пут су имали исти правац.

Промењљиву силу треба интегралити. Тада је рад једнак интегралу скаларног производа датог, рецимо параметром времена t, од тренутка t_1 до тренутка t_2, или од позиције P_1 до P_2 где се тело у тим тренутцима налазило. Из особина интеграла следи да коначни рад не зависи од облика пређене путање, већ само од њених крајњих тачака.

Када сила и пут немају исти правац, рад је њихов скаларни производ, аналогно као што је слобода ($\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$) скаларни производ вектора интелигенције и хијерархије. Највећа формална разлика овде је у томе што су физичка сила и пут вектори са три компоненте (дужина, ширина, висина), док је крајњи број компоненти интелигенције и хијерархије огроман. Поставља се питање има ли ова аналогија неко дубље значење?

Математичари су навикли радити са аналогијама, формама, којима никада или ретко дају неко „дубље значење“. Тако, на пример, увек ми је било чудно ако неко због Ајнштајнове формуле $E = mc^2$ каже да су енергија и маса једно те исто. Ако су исто, зашто се онда мучимо тражећи Хигсов[20] бозон? Управо чињеница да се нека количина масе може претворити у количину енергије према наведеној формули значи да „маса“ није баш исто што и „енергија“. И ту престаје то „дубље значење“, у могућности (не обавезној) претварања једног у друго.

Ако смо се разумели, онда могу закључити да формула $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$ има „дубље значење“ у формули $s = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$ која може да представља и Хајзенбергове релације неодређености (3.5), као и формулу за рад силе на путу (3.42). Ова последња се такође може свести на вероватноће.

Наиме, када у две суседне просторије пустимо гас различитих густина, оба ће вршити притисак на зид између, али ће један надвладати резултантном силом. Та

[19] Gaspard-Gustave de Coriolis (1792-1843), француски математичар.
[20] Peter Higgs, рођ. 1929. године, британски теоријски физичар.

сила је последица притиска који узрокују вероватноће. Она је вектор који делује на тело које се креће датим путем, узрокујући рад (3.42). Нећемо се овде бавити дефинисањем „силе вероватноће“, јер она за формални третман у овој расправи није неопходна. Довољно је приметити да постоји пут јаких асоцијација, па и математичких аналогија од формуле $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$ до формуле за физички рад, а затим опет назад, до формалног разумевања „силе“ која изазива страх од слободе код људи у случају вишка слободе ℓ, односно побуну за слободом - у случају мањка.

Открићем ентропије термодинамика је постала прва грана физике у којој више није свеједно који предзнак има ток времена. Знамо да се Земља креће око Сунца по елипси, али је небитно да ли тај филм гледамо „нормално“ или „уназад“. Закони механике, као и електродинамике, остају исти када протекло време t заменимо са $-t$. То, међутим, није тако у термодинамици. Филм у којем би се парчићи неког разбијеног прозора сами састављали у неоштећено равно стакло отвора, не би био физикално коректан, јер је прскање стакла термодинамички процес.

Слична је ствар са еволуцијом. Видели смо да је еволуција адаптација на околна „правила игре“. Видели смо да је еволуција и повећање слободе ℓ. Заправо доследније је рећи да је еволуција увећање слободе него „прилагођавање ради опстанка“, јер се „опстанак“ понекад завршава на „слепом путу“ без повратка, на начин сличан као када плен хватамо у клопку мамећи га храном. Затим, повећање могућности ℓ је формално исто што и повећање ентропије.

Подсећам још једном - нема инфромације без неодређености, дакле без онога што физичари бавећи се топлотом називају нередом. Што је већа неодређеност пре реализације случајног догађаја то је већа информација након. То смо помињали на примеру бацања коцке (шест једнаковероватних исхода) и бацања новчића (два исхода), када смо приметили да више информације има вест „пао је број три“ од вести „пало је писмо“. Уосталом, Хартлијева информација се и дефинише као логаритам броја исхода $n = 1, 2, 3, \dots$, који је утолико већи број уколико је број n већи. Због процеса пораста слободе $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$ у развоју живог света закључујемо да је и еволуција процес пораста ентропије.

На крају још само једна расправа, односно запажање: еволуција живота на Земљи није процес смањивања ентропије. Тачније, јединка заиста настоји да смањи своју ентропију, али она то чини пребацујући је на своју околину. То наслућујемо из потребе за исхраном (трошења вањске енергије) за одржавање живота јединке и из, углавном, више њене телесне температуре од околне. Међутим, занимљивије разлоге можемо извући из претходних поопштавања.

Видели смо да одржање (количине) информације води до основних (таласних) једначина квантне механике. Неодређеност положаја и импулса електрона чине један систем константне ентропије, као што и сам молекул гаса чини неки такав квантни систем. Честице своју ентропију крећући се предају околини, која опет може бити ткиво или орган сложенијег организма. Рецимо, ћелија своју ентропију предаје нама (особи), а ми као јединка ентропију преносимо на нашу околину. Уопште, сличан процес ($\mathbf{i} \to \mathbf{h}$) иде и даље, све до галаксија које своју ентропију предају универзуму, који је контејнер избачене ентропије.

3.5 Статистика

Статистика је метода прикупљања, анализе, интерпретације, презентације и организације масовних података. Она није грана математике. У примењеној статистици (у научним, индустријским, социјалним проблемима) уобичајени изрази су *популација* (попут „сви људи који живе у датој држави“ или „сваки атом кристала“) и репрезентативан *узорак*. Овде ћемо обратити пажњу на само два статистичка резултата на узорцима: коефицијент корелације и линеарну регресију.

Корелација (лат. *con*: са, *relatio*: однос) је узајамни однос или веза између две или више ствари. У статистици, *корелација* је зависност између две случајне варијабле или два скупа података процењена помоћу реалног броја r већег од -1 а мањег од $+1$, којег називамо *коефицијент корелације*.

Корелација $r > 0,7$ значи јаке позитивне везе (више једне - више друге) варијабли, док r од $-0,3$ па до нуле значи слабе негативне везе (више једне - мање друге).

Прво требамо два низа података, две случајне варијабле:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \tag{3.44}$$

за које израчунавамо средње вредности:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k, \tag{3.45}$$

затим варијансе:

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2, \quad S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(y_k - \bar{y})^2, \tag{3.46}$$

па коваријансу:

$$S_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k y_k - \bar{x}\bar{y}). \tag{3.47}$$

Они дефинишу *Пиарсонов коефицијент* линеарне корелације:

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_x^2}\sqrt{S_y^2}} = \frac{\sum_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sqrt{\sum_k (x_k - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_k (y_k - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_k (x_k y_k - \bar{x}\bar{y})}{\sqrt{\sum_k (x_k - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_k (y_k - \bar{y})^2}}. \tag{3.48}$$

Приметимо да r можемо рачунати и непосредно, као разломак десно.

Корелација r је *косинус* угла између вектора придружених $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ чији интензитети су корени у (3.48), а скаларни производ бројник. Одговарајући израз за слободу тих вектора био би $L = \ell - n\bar{x}\bar{y}$, где је ℓ слобода дефинисана ранијим „обичним“ скаларним производом.

Први пример: продавница сладоледа је током $n = 12$ дана пратила дневну температуру ($\mathbf{x}$) и број комада продатог сладоледа ($\mathbf{y}$) и формирала таблицу:

x:	14,2	16,4	11,9	15,2	18,5	22,1	19,4	25,1	23,4	18,1	22,6	17,2
y:	215	325	185	332	406	522	412	614	544	421	445	408

Израчунавамо редом, од $\bar{x} = 18,675$ и $\bar{y} = 402,4167$ па до $r = 0,9575$. Закључак је да постоје јаке позитивне везе између температуре ваздуха и продаје сладоледа. Косинус угла између придружених вектора је $\cos\gamma = r$, па је угао $\gamma = 16,7°$.

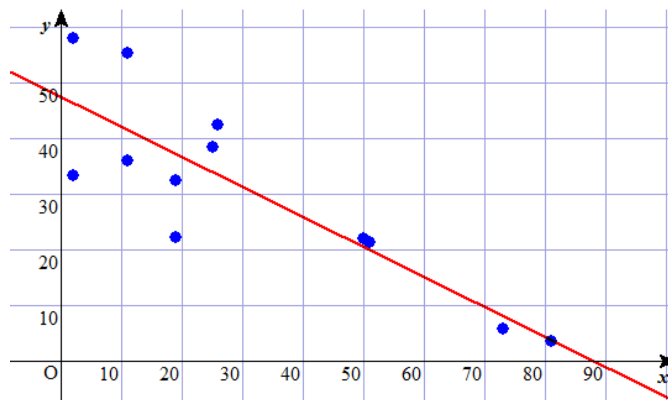
Док корелација испитује јачину зависности случајних варијабли, *регресија* испитује њихов облик и то помоћу регресионе линије. У равни Oxy дате су тачке $T(x_k, y_k)$ са координатама (3.44), за које тражимо једначину праве

$$y = a + bx \tag{3.49}$$

која им је статистички најближа. Користимо методу најмањих квадрата и добијамо:

$$a = \bar{y} - b\bar{x}, \quad b = \frac{\sum_k (x_k y_k - \bar{x}\bar{y})}{\sum_k (x_k^2 - \bar{x}^2)}, \tag{3.50}$$

са уобичајеним ознакама.



Slika 3.8: Регресија (3.17).

Други пример[21]: прва варијабла **x** је проценат ученика који примају додатак у 12 америчких школа и она представља њихов социјално-економски статус. Друга варијабла **y** је проценат ученика које носе кацигу док возе бицикл.

x:	50	11	2	19	26	73	81	51	11	2	19	25
y:	22,1	35,9	57,9	22,2	42,4	5,8	3,6	21,4	55,2	33,3	32,4	38,4

Отуда, $n = 12$, $\bar{x} = 370/12 = 30,833$ и $\bar{y} = 370,6/12 = 30,883$. Даље израчунавамо:

$$\ell = \sum_{k=1}^{12} x_k y_k = 7195,7; \quad r = \frac{-4231,13}{\sqrt{7855,67}\sqrt{3159,68}} = -0,849266 \tag{3.51}$$

а то је r јаке негативне корелације. Параметри регресије су:

$$b = \frac{-4231,13}{7855,67} = -0,538609 \quad a = 47,4904$$

[21]SJSU: `http://www.sjsu.edu/`

па је регресиона линија:

$$y = -0,54x + 47,49. \tag{3.52}$$

То је црвена линија која у смислу најмањих квадрата најбоље одговара плавим тачкама на слици 3.8. Сиромашни ређе носе заштитну кацигу.

У наведена два примера, продавнице сладоледа и ношење каците за бицикл, видели смо да се слобода $\ell = \mathbf{i}\cdot\mathbf{h}$ може „апроксимирати“ коваријансом, па и бројником коефицијента линеарне корелације у изразу (3.13):

$$L = \ell - n\bar{x}\bar{y}, \quad \ell = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k. \tag{3.53}$$

У наставку (стереометрија) ћемо видети геометријску интерпретацију ових израза, којег то угла је r косинус и коју пропорцију представља регресија, али се за сада задржимо на пар задатака из алгебре ових (случајних) n-торки. Питање је да ли се слагање корелације са оном претходном адаптацијом може изразити неком „лакшом“ математиком?

Пример 3.5.1. *Показати да је L израза (3.53) позитивно када су интелигенција $\mathbf{x}$ и хијерархија $\mathbf{y}$ усклађене, у случају:*

а) када је $n = 2$;   б) када је $n = 3$.

Решење. а) Имамо редом $\bar{x} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $\bar{y} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ и $\ell = x_1y_1 + x_2y_2$, па је:

$$L = \ell - 2\bar{x}\bar{y} = (x_1y_1 + x_2y_2) - \frac{1}{2}(x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(y_1 - y_2),$$

што значи ако је $x_1 - x_2$ и $y_1 - y_2$ истог знака, тада је $L > 0$.

б) Из $\bar{x} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$, $\bar{y} = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$ и $\ell = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ следи:

$$L = \ell - 3\bar{x}\bar{y} = \frac{1}{3}[(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(y_1 - y_3) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3)],$$

што опет значи ако су вектори $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ усклађени, тада је L позитиван број. □

Правила игре које нам намеће природа понекад је релативно лако вредновати. На пример, ако толико и толико дана не уносим довољно *витамина C* имаћу толико и толико шансе да оболим од *скорбута.* Међутим, такво вредновање зна бити потешко са друштвеним нормама.

Пример 3.5.2. *Показати неки пример употребе регресије за процену закона.*

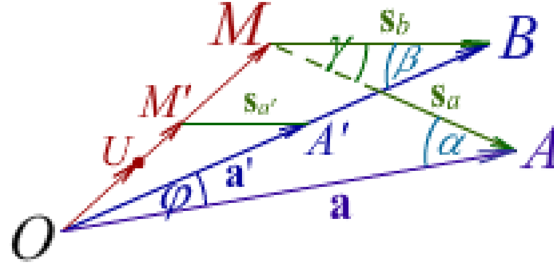
Решење. Рецимо ослањањем на понашање појединаца. Вредност закона можемо апроксимирати склоношћу (прилагођеношћу, адаптацијом) корисника закона.

На 12 места стоје саобраћајни знакови ограничења, а ми бројимо возила и одређујемо фреквенцију поштовања тих регулатива. Након одређеног времена добијамо низове из којих можемо извући регресиону праву и дефинисати „квалитет“ закона, ставку по ставку. □

Подсећам још једном да статистика нема снагу математике (закључак статистике се не може користити у доказу математичке теореме), нити се одлуке масе могу сматрати релевантним за процену мишљења (просечног) појединца.

3.6 Стереометрија статистике

Дате су две n-торке случајних варијабли $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $A'(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ и n-торка јединица $U(1, 1, \dots, 1)$. Они дефинишу три вектора $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{a}' = \overrightarrow{OA'}$ и $\mathbf{u} = \overrightarrow{OU}$ у правоуглом Декратовом систему координата $O\xi_1\xi_2\dots\xi_n$. Оргогоналне пројекције тачака A и A' на праву OU су тачке M и M' редом, као на слици 3.9.



Slika 3.9: Правоугли троуглови OAM и $OA'M'$.

Као што знамо, *аритметичка средина* је средња вредност датих бројева. Ако аритметичке средине означимо са $\mu(\mathbf{a}) = \bar{a}$ и $\mu(\mathbf{a}') = \bar{a}'$, где је:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad \bar{a}' = \frac{a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n}{n}, \tag{3.54}$$

тада можемо доказати да су троуглови OAM и $OA'M'$ правоугли, са правим угловима у теменима M и M', при чему је:

$$\mathbf{m} = \overrightarrow{OM} = \bar{a}\,\mathbf{u}, \quad \mathbf{m}' = \overrightarrow{OM}' = \bar{a}'\,\mathbf{u}. \tag{3.55}$$

То је тврђење следеће теореме.

Теорема 3.6.1. *Троугао OAM је правоугли са $\angle M = 90°$.*

Доказ. Израчунавамо скаларни производ:

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MA} = (\bar{a}, \bar{a}, \dots, \bar{a}) \cdot (a_1 - \bar{a}, a_2 - \bar{a}, \dots, a_n - \bar{a}) =$$

$$= \mu \cdot (a_1 - \bar{a}) + \mu \cdot (a_2 - \bar{a}) + \dots + \mu \cdot (a_n - \bar{a})$$

$$= \mu \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n - n\bar{a}) = \bar{a} \cdot 0 = 0.$$

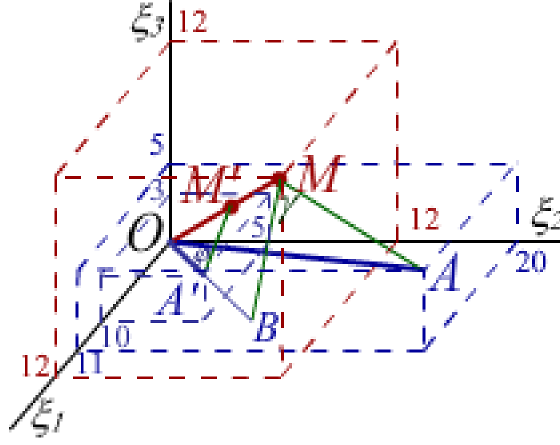
Из $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$ следи $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{MA}$, а отуда $\angle M = 90°$. □

Нека је тачка B на правој OA', тако да је ортогонална пројекција на праву OU пада у тачку M. Ако за сличне правоугле троуглове OBM и $OA'M'$ важи пропорција $\overline{OB} : \overline{OA}' = \overline{OM} : \overline{OM}'$, тада је $\overrightarrow{OB} = \bar{a}\,\overrightarrow{OA}'/\bar{a}'$ или $\mathbf{b} = \bar{a}\,\mathbf{a}'/\bar{a}'$. Отуда:

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, \dots, b_n) = \frac{\bar{a}}{\bar{a}'}\,(a'_1, a'_2, \dots, a'_n), \tag{3.56}$$

па је $b_k = \frac{\bar{a}}{\bar{a}'}\, a'_k$ редом за $k = 1, 2, \dots, k$. Са *линије средине* OM видимо дуж AB под угловима $\varphi = \angle AOB$ и $\gamma = \angle AMB$, што је приказано на слици 3.9.

Пример 3.6.2. *Представити тројке* $A(11, 20, 5)$ *и* $A'(10, 5, 3)$ *у Декартовом систему.*



Slika 3.10: Тројке $A(11, 20, 5)$, $A'(10, 5, 3)$.

Решење. На слици 3.10 видимо правоугли троугао OAM и једва $OA'M'$. Аритметичке средине су $\bar{a} = 12$ и $\bar{a}' = 6$, па тачка B има координате $B(20, 10, 6)$.

Странице троугла OAM су:

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \overline{OA} = \sqrt{11^2 + 20^2 + 5^2} = \sqrt{546}, \\ \mathbf{m} = \overline{OM} = \sqrt{12^2 + 12^2 + 12^2} = \sqrt{432}, \\ \mathbf{s}_a = \overline{MA} = \sqrt{(11-12)^2 + (20-12)^2 + (5-12)^2} = \sqrt{114}, \end{cases}$$

и $\overline{OA}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MA}^2$, па важи Питагорина теорема. Троугао OAM је правоугли.

Странице троугла $OA'M'$ су:

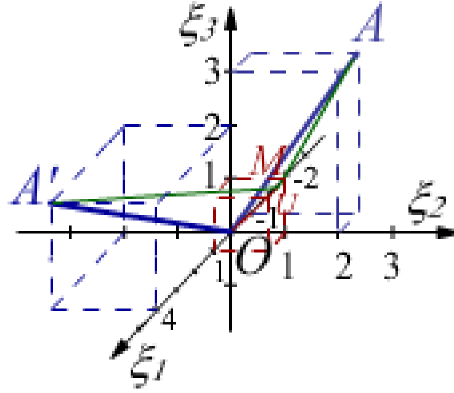
$$\begin{cases} \mathbf{a}' = \overline{OA'} = \sqrt{10^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{134}, \\ \mathbf{m}' = \overline{OM'} = \sqrt{6^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{108}, \\ \mathbf{s}_{a'} = \overline{M'A'} = \sqrt{(10-6)^2 + (5-6)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{26}, \end{cases}$$

и $\overline{OA}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MA}^2$. Троугао $OA'M'$ је такође правоугли. □

Пример 3.6.3. *Тројке* $A(-1, 2, 3)$ *и* $A'(4, -2, 2)$ *представити у Декартовом систему.*

Решење. Решење је на слици 3.11. Аритметичке средине тачака A и A' су једнаке $\bar{a} = \bar{a}' = \frac{4}{3}$, па $M(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$. За странице троугла OAM налазимо:

$$\begin{cases} \overline{OA} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} = \sqrt{\frac{42}{3}}, \\ \overline{OM} = \sqrt{(\frac{4}{3})^2 + (\frac{4}{3})^2 + (\frac{4}{3})^2} = \sqrt{\frac{16}{3}}, \\ \overline{MA} = \sqrt{(-1-\frac{4}{3})^2 + (2-\frac{4}{3})^2 + (3-\frac{4}{3})^2} = \sqrt{\frac{26}{3}}, \end{cases}$$



Slika 3.11: Тројке $A(-1,2,3)$, $A'(4,-2,2)$.

те $\overline{OA}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MA}^2$.

За други троугао:

$$\begin{cases} \overline{OA'} = \sqrt{4^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{24} = \sqrt{\frac{72}{9}}, \\ \overline{OM} = \sqrt{(\frac{4}{3})^2+(\frac{4}{3})^2+(\frac{4}{3})^2} = \sqrt{\frac{16}{3}}, \\ \overline{MA'} = \sqrt{(4-\frac{4}{3})^2+(-2-\frac{4}{3})^2+(2-\frac{4}{3})^2} = \sqrt{\frac{56}{3}}, \end{cases}$$

и поново $\overline{OA'}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MA'}^2$. □

Троугао ABM називамо *корелациони троугао*. Странице тог троугла су вектори:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA} = \mathbf{s}_a = (a_1-\bar{a}, a_2-\bar{a}, \dots, a_n-\bar{a}), \\ \overrightarrow{MB} = \mathbf{s}_b = (b_1-\bar{b}, b_2-\bar{b}, \dots, b_n-\bar{b}), \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \mathbf{s}_b - \mathbf{s}_a. \end{cases} \tag{3.57}$$

Са друге стране, из троугла OAB налазимо:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1-a_1, b_2-a_2, \dots, b_n-a_n) = \mathbf{b}-\mathbf{a}, \tag{3.58}$$

и такође $\mathbf{s}_b - \mathbf{s}_a = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Косинусна теорема[22] даје:

$$\begin{cases} \overline{AB}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 - 2\cdot\overline{MA}\cdot\overline{MB}\cdot\cos\gamma, \\ \overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos\varphi. \end{cases} \tag{3.59}$$

Из правоуглих троуглова OAM и OBM следи:

$$\begin{cases} \overline{OM} = a\sin\alpha & \overline{MA} = a\cos\alpha, \\ \overline{OB} = a\sin\alpha/\sin\beta, & \overline{MB} = a\sin\alpha\cot\beta, \end{cases} \tag{3.60}$$

[22]Law of cosines: `https://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_cosines`

где $a = \overline{OA}$, $\alpha = \angle OAM$, $\beta = \angle OBM$. Према томе:

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 - 2\cdot\overline{MA}\cdot\overline{MB}\cdot\cos\gamma = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos\varphi,$$

$$s_a^2 + s_b^2 - 2s_a s_b\cos\gamma = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi,$$

$$2ab\cos\varphi - 2s_a s_b\cos\gamma = (a^2 - s_a^2) + (b^2 - s_b^2),$$

$$2(ab\cos\varphi - s_a s_b\cos\gamma) = m^2 + m^2,$$

$$ab\cos\varphi - s_a s_b\cos\gamma = m^2,$$

или помоћу скаларних производа вектора:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{m}\cdot\mathbf{m} + \mathbf{s}_a\cdot\mathbf{s}_b. \tag{3.61}$$

Ознаке су са слике 3.9 и $\mathbf{m} = \overrightarrow{OM}$.

Посебно, косинус угла између вектора $\mathbf{s}_a$ и $\mathbf{s}_{a'}$ је:

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{s}_a\cdot\mathbf{s}_b}{|\mathbf{s}_a||\mathbf{s}_b|} = \frac{\sum_k(a_k-\bar{a})(b_k-\bar{b})}{\sqrt{\sum_k(a_k-\bar{a})^2}\sqrt{\sum_k\left(b_k-\bar{b}\right)^2}}. \tag{3.62}$$

Исти резултат за гама добијамо ако користимо $\mathbf{s}_{a'}$ уместо $\mathbf{s}_b$. То је *Пиарсонов коефицијент* r линеарне корелације. Са друге стране:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{\sum_k a_k b_k}{\sqrt{\sum_k a_k^2}\sqrt{\sum_k b_k^2}} \tag{3.63}$$

То је и косинус угла између датих вектора $\mathbf{a}$ and $\mathbf{a}'$.

Пример 3.6.4. *Наћи углове у примерима 3.6.2 и 3.6.3.*

Решење. У примеру 3.6.2:

$$\begin{cases}\cos\gamma = \frac{-4-8+21}{\sqrt{114}\sqrt{26}} = 0,202048, & \gamma\approx 78^\circ,\\ \cos\varphi = \frac{11\cdot20+20\cdot10+5\cdot6}{\sqrt{11^2+20^2+5^2}\sqrt{20^2+10^2+6^2}} = 0,831829, & \varphi\approx 34^\circ,\end{cases} \tag{3.64}$$

па је угао гама више него два пута већи од угла фи.

У примеру 3.6.3:

$$\begin{cases}\cos\gamma = \frac{22/3}{\sqrt{26/3}\sqrt{56/3}} = 0,576557, & \gamma\approx 55^\circ,\\ \cos\varphi = \frac{-2}{\sqrt{14}\sqrt{24}} = -0,109109, & \varphi\approx 96^\circ.\end{cases} \tag{3.65}$$

Гама је скоро два пута мањи од фи. □

Пример 3.6.5. *Први вектор* $\mathbf{a}$ *има компоненте проценте ученика који примају социјалну помоћ у 12 школа, а други* $\mathbf{a}'$ *проценте ученика који користе кацигу док возе бицикл.*

$\mathbf{a}$:	*50*	*11*	*2*	*19*	*26*	*73*	*81*	*51*	*11*	*2*	*19*	*25*
$\mathbf{a}'$:	*22.1*	*35.9*	*57.9*	*22.2*	*42.4*	*5.8*	*3.6*	*21.4*	*55.2*	*33.3*	*32.4*	*38.4*

Израчунати углове γ *и* φ.

Решење. За $\bar{a} = 370/12 = 30,833$ и $\bar{a}' = 370.6/12 = 30.883$, добијамо:

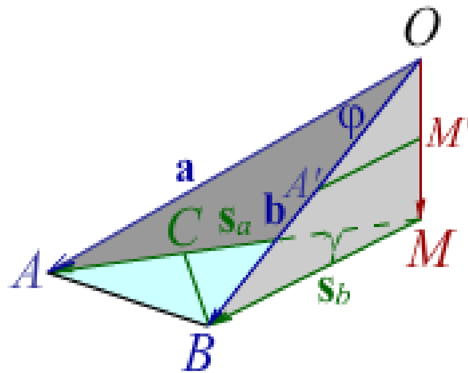
$\mathbf{s}_a$:	19.2	-19.8	-28.8	-11.8	-4.8	42.2	50.2	20.2	-19.8	-28.8	-11.8	-5.8
$\mathbf{s}_{a'}$:	-8.8	5.0	27.0	-8.7	11.5	-25.1	-27.3	-9.5	24.3	2.4	1.5	7.5

Затим израчунавамо косинусе[23]:

$$\begin{cases} \cos\gamma = \frac{-4231,14}{\sqrt{7855,68}\sqrt{3159,68}} = -0,849266, & \gamma \approx 148°, \\ \cos\varphi = \frac{7195,7}{\sqrt{19264}\sqrt{14605,0}} = 0,428992, & \varphi \approx 65°. \end{cases} \tag{3.66}$$

Угао гама је више него два пута већи од угла фи, а корелациони коефицијент $r = -0,85$ показује јаку негативну корелацију. Што су сиромаштнији, ученици ређе користе кацигу. □

У корелационом троуглу MAB права BC, где $C \in MA$, окомита је на страницу MA, као што се види на слици 3.12.



Slika 3.12: Права BC је окомита на MA.

Из претходног знамо:

$$\overline{MC} = \overline{MB} \cdot \cos\gamma = s_b \cos\gamma, \quad \overline{MA} = |\mathbf{s}_a| = s_a, \tag{3.67}$$

што сада даје:

$$x : y = \overline{MC} : \overline{MA} = \frac{s_b}{s_a}\cos\gamma = \frac{s_b}{s_a}\frac{\mathbf{s}_a \cdot \mathbf{s}_b}{|\mathbf{s}_a||\mathbf{s}_b|},$$

$$x : y = \frac{\mathbf{s}_a \cdot \mathbf{s}_b}{|\mathbf{s}_a|^2} = \frac{\sum_k (a_k - \bar{a})(b_k - \bar{b})}{\sum_k (a_k - \bar{a})^2}, \tag{3.68}$$

са аритметичким techninama $\bar{b} = \bar{a}$. То је једначина *регресионе праве*.

Напомена: У време писања овог текста, запажања о „стереометрији“ статистичких појмова корелације и регресије била су потпуно непозната јавности и зато можда мој избор нових назива није био најспретнији.

[23] в. (3.51)

Bibliografija

[1] Растко Вуковић: *АНАЛИЗА ДЕМОКРАТИЈЕ*, утопија, ауторитет и суживот, Бања Лука[24], октобар 2015.

[2] Растко Вуковић: *АНАЛИЗА СЛОБОДЕ*, интелигенција и хијерархија, Архимед Бања Лука[25], мај 2016.

[3] Rastko Vukovic: *Correlation by Geometry*, Correlation and regression vectors - The geometry of the statistics, Archive.org[26], May 28, 2016.

[4] Растко Вуковић: *МАТЕМАТИЧКА ТЕОРИЈА ИНФОРМАЦИЈЕ И КОМУНИКАЦИЈЕ*, Друштво математичара Републике Српске, Бања Лука 1995.

[5] Lee Rozema, Ardavan Darabi, Dylan Mahler, Alex Hayat, Yasaman Soudagar, Aephraim Steinberg: *Violation of Heisenberg's Measurement-Disturbance Relationship by Weak Measurements*, Physical Review Letters[27], 2012; 109 (10) DOI:

[6] Erich Fromm: *Bekstvo od slobode*, NAPRIJED[28] i NOLIT, Zagreb 1984.

[7] Edmund Husserl: *KRIZA EVROPSKIH ZNANOSTI* i transcendentalna fenomenologija, Uvod u fenomenološku filozofiju[29] (Published: 1936 in German, 1954 in English), Globus/Zagreb, 1990.

[24] Анализа демократије: `www.academia.edu/16788149/`
[25] Анализа слободе: `www.academia.edu/25712798/`
[26] Correlation by Geometry: `https://archive.org/details/Correlation`
[27] Violation: `http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.109.100404`
[28] Bekstvo od slobode: `https://www.scribd.com/doc/31411430/Erich-Fromm-Bekstvo-Od-Slobode`
[29] Husserl: `https://www.scribd.com/doc/123518590/95064687`

Indeks

ISBN 978-99938-854-3-6


CIP - Каталогизација у публикацији
Народна и универзитетска библиотека
Републике Српске, Бања Лука

316.647
159.937.24

ВУКОВИЋ, Растко

Информација перцепције : слобода, демократија и физика / Растко Вуковић. - Бања Лука : Економски институт, 2016 ([б. м. : б. и.]). - 88 стр. : граф. прикази ; 25 cm

Библиографија: стр. 85. - Регистар.

ISBN 978-99938-854-3-6

COBISS.RS-ID 5977880